

Граф, антиграф и компоненты

У этого человека по крайней мере три злодейства на душе!

А.С.Пушкин, «Пиковая дама»

1. На математический праздник пришло 100 детей, причем каждый ребенок знает не меньше 50 пришедших. Докажите, что граф знакомств связан.
2. В Матвертикалии 12 станций метро, соединённых 56 перегонами (две станции соединяются не более чем одним перегоном). Докажите, что метрополитен связан.
3. На проведение Матпраздника пришло 30 восьмиклассников. Оказалось, что любые пять человек можно посадить за круглый стол с условием, чтобы каждый знал обоих своих соседей. Какое минимальное количество пар знакомых могло быть среди них?
4. (а) В Матвертикалии 50 городов. Между каждыми двумя городами можно проехать либо суперпоездом, либо мегапоездом. Докажите, что, пользуясь только одним из видов поездов, можно объездить всю страну.
(б) Каких графов на 50 вершинах больше: связных или несвязных?
5. В параллельной вселенной есть страна Горизоналия, очень похожая на Вертикалию: у каждого города есть «двойник». Однако, если в Вертикалии два города соединены дорогой, то в Горизоналии дороги между этими городами нет, а если города в Вертикалии соединены не были, они соединены дорогой в вертикалии. Андрей в Вертикалии понял, что не может проехать из Суперска в Мегск, сделав менее двух пересадок. Покажите, что в Горизонталии он может проехать из любого города в другой, сделав не более двух пересадок.
6. В Матвертикалии $2n$ городов, некоторые из которых соединены дорогами, причём от каждого города ведёт не менее чем n дорог.
(а) Докажите, что если закрыть на ремонт любые $n - 1$ дорог, то всё равно из любого города можно будет добраться в любой другой.
(б) Укажите все случаи, когда связность нарушается при закрытии n дорог.
7. В Матвертикалии больше 445 городов. Город Суперск соединен дорогами с 444 городами, а каждый город, кроме Суперска, соединён дорогами ровно с 8 городами. В Матвертикалии от каждого города можно добраться в любой другой. Докажите, что можно закрыть на ремонт половину дорог, идущих из Суперска, так, что возможность попасть из каждого города в любой другой сохранится.