

## Вопросы к зачету

Вчера была суббота, и он никогда до конца дней своих не забудет эту субботу, вот только бы вспомнить то, что он не собирался забыть. . .

---

Терри Пратчетт, Нил Гейман. Благие знамения

### Алгебра

1. Сформулируйте и докажите неравенства о средних для 2 чисел. Для каждого неравенства поясните, когда неравенство обращается в равенство.
2. Сформулируйте и докажите неравенство Коши для 4 чисел.
3. Сформулируйте и докажите неравенство Коши для 3 чисел.
4. Найдите наименьшее значение выражения  $\frac{1}{4x} + 3x$  для положительных  $x$ .
5. Сформулируйте и докажите Малую теорему Ферма (любым из двух способов).

### Геометрия

6. Сформулируйте неравенство треугольника. Сформулируйте и докажите неравенство о ломаной.
7. Сформулируйте и докажите неравенство о медиане.
8. Сформулируйте и докажите неравенство о резинке.

### Комбинаторика

9. Сформулируйте 4 определения дерева и докажите их эквивалентность.
10. Дайте определение висячей вершины (листа). Докажите, что дерево содержит хотя бы два листа.
11. Дайте определение остовного дерева для связного графа. Сформулируйте и докажите Лемму о существовании остовного дерева.
12. Докажите, что в связном графе на  $N$  вершинах ребер хотя бы  $N - 1$ .
13. Решите задачу. Объясните, как она связана с  $C_n^k$ .  
«Настя выбирает из пришедших на кружок несколько человек в команду на олимпиаду (возможно, она не возьмет вообще никого). Каких способов набрать состав больше: из чётного количества людей или из нечётного, если количество людей в кружке равно (a)  $2m + 1$ ; (b)  $2m$ ?»
14. Объясните, в чем заключается принцип доказательства методом математической индукции (из каких частей он состоит). Приведите пример решения задачи с помощью индукции.