Продолжение индукции

Часто требуется доказать утверждение типа: *«Для каждого натурального n верно, что …»*. Такое утверждение можно рассматривать, как цепочку утверждений «Для $n = 1$ верно, что …», «Для $n = 2$ верно, что …» и т.д.

Метод математической индукции состоит в том, чтобы доказать первое из этих утверждений (называемое **БАЗОЙ** или основанием индукции), что обычно достаточно просто сделать, а затем доказать **ШАГ** (или **переход**) индукции: «Если верно утверждение с номером n, то верно утверждение с номером $(n + 1)$».

Если верна база индукции и верен шаг индукции, то все утверждения верны.

Комбинаторика

1. На полке стоит 55 томов собрания сочинений В. И. Ленина. За раз разрешается взять несколько подряд идущих томов и переставить их в обратном порядке. Докажите, что такими операциями можно расставить тома по порядку.

2. Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в этом многоугольнике найдутся две равные стороны.

Теория чисел

3. Докажите, что $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ делится на 9.

4. Докажите, что $4^n + 15n - 1$ делится на 9.

5. Докажите, что число $111\ldots11$ (243 единицы) делится на 243.

Алгебра

6. **Неравенство Бернулли.** $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$ при $x > -1, n \geqslant 0$.

7.

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

8. Из чисел от 1 до $2n - 1$ выбрано $n + 1$ число. Докажите, что одно из выбранных чисел равно сумме двух других.