

Подсчет двумя способами

- Ну, сколько у нас спасательных капсул?
- Ни одной.
- Хорошо пересчитал?
- Два раза.

Автостопом по галактике

1. (a) Можно ли в таблице 10×10 расставить числа так, чтобы сумма чисел любой строки была равна 15, а сумма чисел любого столбца была равна 17?
(b) Можно ли в таблицу 5×5 записать числа $1, 2, 3, \dots, 25$ так, чтобы в каждой строке сумма нескольких записанных чисел была равна сумме остальных чисел этой строки?
(c) Можно ли в клетки квадрата 10×10 поставить некоторое количество звёздочек так, чтобы в каждом квадрате 2×2 было ровно две звёздочки, а в каждом прямоугольнике 3×1 ровно одна звёздочка? (В каждой клетке может стоять не более одной звёздочки.)
2. Имеется много одинаковых квадратов. В вершинах каждого из них в произвольном порядке написаны числа 1, 2, 3 и 4. Квадраты сложили в стопку и написали сумму чисел, попавших в каждый из четырёх углов стопки. Может ли оказаться так, что в каждом углу стопки сумма равна 2018?
3. На сторонах шестиугольника было записано шесть чисел, а в каждой вершине — число, равное сумме двух чисел на смежных с ней сторонах. Затем все числа на сторонах и одно число в вершине стерли. Можно ли восстановить число, стоявшее в вершине?
4. Можно ли расставить по кругу 10 целых неотрицательных чисел так, чтобы сумма каких-то трех расположенных подряд чисел была равна 1, каких-то трех подряд расположенных — $2, \dots$, каких-то трех подряд расположенных — 10?
5. Дан набор, состоящий из таких 1357 чисел, что если каждое число в наборе заменить на сумму остальных, то получится тот же набор. Докажите, что произведение чисел в наборе равно 0.
6. В квадрате 2020×2020 расставлены числа так, что в любом квадрате 2×2 сумма левого верхнего числа и правого нижнего числа равна сумме левого нижнего числа и правого верхнего числа. Докажите, что сумма чисел, стоящих в левом верхнем и правом нижнем углах квадрата 2020×2020 , равна сумме чисел, стоящих в двух других углах.
7. Илья вошел в комнату, где Иван и Петр играли в шахматы и воскликнул: «Смотрите, на каждой из 30 диагоналей шахматной доски стоит нечётное число фигур!». Докажите, что Илья ошибся.