Малая теорема Ферма

— Что ты знаешь о математике, молодой человек? – спросил он, помолчав.
Тон его мне не понравился, но я продолжал по намеченному плану:
— Я был первым в классе, дядя Петрос, я получил школьную награду!
Он некоторое2- время обдумывал эту информацию, потом пожал плечами.

Дядюшка Петрос и проблема Гольдбаха

1. **Другое доказательство МТФ.**
Пусть a — некоторое число, которое не делится на простое число p.
(a) Докажите, что в последовательности $0\cdot a$, $1\cdot a$, $2\cdot a,\ldots,(p-1)\cdot a$ все числа дают разные остатки по модулю p.
(b) Докажите, что $(1\cdot a)\cdot(2\cdot a)\cdot\ldots\cdot((p-1)\cdot a)\underset{p}{\equiv}(p-1)!$.
(c) **Малая теорема Ферма** Докажите, что $a^{p-1}\underset{p}{\equiv}1$.

2. Используя МТФ (Малую теорему Ферма) найдите остаток от деления
(a) 2^{102} на 101;
(b) 23^{1600} на 41;
(c) 8^{900} на 29.

3. Докажите, что
(a) $7^{120}-1$ делится на 143;
(b) $300^{3000}-1$ делится на 1001;
(c) при любом натуральном n выражение n^7-n делится на 42.

4. Докажите, что либо n^8-1, либо n^8+1 делится на 17, если n не делится на 17.

5. Известно, что $a^{12}+b^{12}+c^{12}+d^{12}+e^{12}+f^{12}$ делится на 13 (a,b,c,d,e,f — целые числа). Докажите, что $abcdef$ делится на 13^6.

6. Пусть p и q различные простые числа. Докажите, что $p^q+q^p\underset{pq}{\equiv}p+q$.

7. Докажите, что число $40^{81}+17^{160}$ является составным.

8. Докажите, что для любого простого $p>5$ справедливо, что число $\underbrace{111\ldots11}_{p-1}$ кратно p.

9. Найти все такие простые числа p, что число $5^{p^2}-1$ делится на p.