Неравенства о средних.

Для любых положительных чисел a и b справедливы неравенства:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}},$$

причем каждое из неравенств обращается в равенство, только когда числа a и b равны.

Эти выражения (слева направо) называются *среднее квадратическое, среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее гармоническое.*
Неравенство $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ также называют *неравенством Коши.*

Во всех задачах все числа — положительные.

1. Докажите неравенство между средним геометрическим и средним гармоническим.

2. Докажите следующие неравенства:
(a) $\frac{x+1}{2} \geqslant \frac{2}{1+\frac{1}{x}}$; **(b)** $x+\frac{1}{x} \geqslant 2$; **(c)** $x^3y+xy^3 \geqslant 2x^2y^2$; **(d)** $4 \geqslant \sqrt{7-x}+\sqrt{x+1}$.

3. Найдите наименьшее значение выражения $3b+\frac{1}{4b}$.

4. Что больше: $\sqrt{2018}+\sqrt{2020}$ или $2\sqrt{2019}$?

5. Докажите, что
(a) $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \geqslant 4$;
(b) $(a+b+c+d)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}) \geqslant 16$.

Иногда полезно сделать из одного слагаемого — несколько (или наоборот).

6. **(Неравенство о средних для четырех чисел)**. Докажите, что:

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$$

.

7. Произведение чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$ равно 1. Докажите следующие неравенства:
(a) $(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) \geqslant 2^n$;
(b) $(3+a_1)(3+a_2)\cdot\ldots\cdot(3+a_n) \geqslant 4^n$.

8. Найдите наименьшее значение выражения $a^3+\frac{3}{a}$.

9.* Выведите из 6 задачи **неравенство о средних для трёх чисел**.
Придумайте, что нужно взять в качестве a, b, c, d в 6 задаче, чтобы получилось следующее неравенство:

$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$$

.