

Деревья

Опала листва.
Весь мир одноцветен.
Лишь ветер гудит.

Мацуо Басе

Определение. Деревом называется:

- Связный граф без циклов.
 - Граф, между любыми двумя вершинами которого существует единственный путь.
 - Связный граф, который при удалении любого ребра перестает быть связным.
 - Связный граф, количество ребер которого на 1 меньше количества вершин.
1. Докажите, что эквивалентны определения под номерами:
(а) 1 и 2; (б) 1 и 3; (с) 1 и 4.
 2. Докажите, что в каждом дереве из более чем одной вершины есть хотя бы два листа.
 3. **Лемма о существовании остовного дерева (скелета).** Докажите, что из каждого связного графа можно удалить некоторое число ребер так, чтобы получилось дерево.
 4. Существует ли граф, у которого есть два остовных дерева без общих ребер?
 5. Существует ли дерево на 9 вершинах, в котором 2 вершины имеют степень 5?
 6. В Супермегии N городов. Президент издал указ связать их железными дорогами в единую сеть. Каждая ветка связывает два города, не пересекаясь с другими ветками. Докажите, что всего понадобится не менее $N - 1$ веток.
 7. Есть n камней разного веса. За одно взвешивание можно сравнить любые два камня между собой. За какое наименьшее число взвешиваний можно наверняка найти самый тяжелый?
 8. Невод браконьера представляет собой прямоугольную сетку 100×100 клеток. После каждой поимки инспектор рыбоохраны обрезает в неводе одну веревочку (указанную браконьером), так, чтобы невод не распался на части. Сколько задержаний может выдержать браконьер до разрушения своего инструмента?
 9. В марсианском метро с любой станции можно проехать на любую другую. Докажите, что можно закрыть на ремонт некоторую станцию и запретить проезд через неё так, что по-прежнему можно будет с любой оставшейся станции проехать на любую другую.
 10. Ваня выложил из спичек клетчатый квадрат 10×10 . Он хочет убрать n спичек так, чтобы муравей, оказавшись в любом месте этого «лабиринта», мог выбраться наружу. При каком наименьшем n это возможно?