

Разнойбой

1. Илья и Максим делят одно и то же натуральное число с остатком. Илья делит его на 8, а Максим на 9. Частное, которое получил Илья, и остаток, который получил Максим, в сумме дают 13. Какой остаток получился у Ильи?
2. Сумма трёх чисел a, b, c делится на 30. Докажите, что сумма их пятых степеней тоже делится на 30.
3. В ряд записаны 10 натуральных чисел. Докажите, что можно выбрать группу из одного или нескольких чисел подряд так, чтобы сумма делилась на 4.
4. (а) Найдите $(12n + 1, 30n + 2)$.
(б) Чему может быть равен $(30n + 5, 11n + 1)$?
(с) Докажите, что $(5a + 3b, 13a + 8b) = (a, b)$.
5. Докажите тождество

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

6. Докажите тождество

$$2^{444} + C_{222}^1 \cdot 2^{442} + C_{222}^2 \cdot 2^{440} + \dots + C_{222}^{222} = 25^{111}.$$

7. В четырехугольнике $ABCD$ углы B и D прямые, а диагонали AC и BD перпендикулярны. Докажите, что одна из диагоналей делит другую пополам.
8. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) диагонали перпендикулярны. На стороне AD выбрана точка E такая, что $BE = ED$. Чему равно AE , если $AD = 14$, $BC = 6$?
9. Точка M – середина стороны CD параллелограмма $ABCD$. На стороне BC выбрана точка R так, что $\angle AMR = 90^\circ$. Найдите длину отрезка AR , если $BR = x$, $RC = y$.