Малая теорема Ферма

0. **Доказательство МТФ.**
Пусть a — некоторое число, которое не делится на простое число p.
(a) Докажите, что в последовательности $0 \cdot a$, $1 \cdot a$, $2 \cdot a, \ldots, (p-1) \cdot a$ все числа дают разные остатки по модулю p.
(b) Докажите, что $(1 \cdot a) \cdot (2 \cdot a) \cdot \ldots \cdot ((p-1) \cdot a) \underset{p}{\equiv} (p-1)!$.
(c) **Малая теорема Ферма** Докажите, что $a^{p-1} \underset{p}{\equiv} 1$.

1. Используя МТФ (Малую теорему Ферма) найдите остаток от деления
(a) 2^{102} на 101;
(b) 23^{1600} на 41;
(c) 8^{900} на 29.

2. Докажите, что
(a) $7^{120} - 1$ делится на 143;
(b) $300^{3000} - 1$ делится на 1001;
(c) при любом натуральном n выражение $n^7 - n$ делится на 42.

3. Докажите, что либо $n^8 - 1$, либо $n^8 + 1$ делится на 17, если n не делится на 17.

4. Известно, что $a^{12} + b^{12} + c^{12} + d^{12} + e^{12} + f^{12}$ делится на 13 (a, b, c, d, e, f — целые числа). Докажите, что $abcdef$ делится на 13^6.

5. Пусть p и q различные простые числа. Докажите, что $p^q + q^p \underset{pq}{\equiv} p + q$.

6. Докажите, что число $40^{81} + 17^{160}$ является составным.

7. Докажите, что для любого простого $p > 5$ справедливо, что число $\underbrace{111\ldots11}_{p-1}$ кратно p.

8. Найти все такие простые числа p, что число $5^{p^2} - 1$ делится на p.