

Сравнения по модулю. Повторение.

Определение. *Остатком* числа a при делении на натуральное число b называется такое число r , что $a = b \cdot q + r$ для некоторого целого q и $0 \leq r < b$.

Осознайте! Два числа дают одинаковый остаток при делении на b тогда и только тогда, когда их разность делится на b .

Определение Целые числа a и b сравнимы по модулю натурального числа n , если их разность делится на n . Это записывается как $a \equiv b \pmod{n}$.

Свойства сравнений.

- Если $a \equiv b \pmod{n}$, то $a + c \equiv b + c \pmod{n}$.
- Если $a \equiv b \pmod{n}$, то $ac \equiv bc \pmod{n}$.
- Если $a \equiv b \pmod{n}$, $a \equiv c \pmod{n}$, то $a \equiv c \pmod{n}$.
- Если $a \equiv b \pmod{n}$, $a \equiv c \pmod{n}$, то $a + c \equiv b + d \pmod{n}$.
- Если $a \equiv b \pmod{n}$, $a \equiv d \pmod{n}$, то $ac \equiv bd \pmod{n}$.
- Если $a \equiv b \pmod{n}$, то $a^k \equiv b^k \pmod{n}$.
- Если $ac \equiv bc \pmod{n}$ и $(c, n) = 1$, то $a \equiv b \pmod{n}$.

Мысль №1. Вычисляя остаток от деления некоторого арифметического выражения на некоторое число a , можно заменять числа на их остатки при делении на a . Например, найдем остаток от деления числа $16 \cdot 17 \cdot 19$ на 3. Он будет таким же, как у $1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$.

Мысль №2. А можно заменять и не на остатки! Если какое-то другое число удобнее и остаток у него правильный, смело меняйте на него. Пример: ищем остаток при делении числа 20^{14} на 7. Можно было бы заменить 20 на 6, но это дает мало пользы. Зато если заменить 20 на -1 , получится $(-1)^{14} = 1$.

Учимся считать

1. Вычислите остаток числа:
 - (a) $5 \cdot 6 \cdot 7$ при делении на 4;
 - (b) 17^{150} на 16;
 - (c) 17^9 на 18;
 - (d) $1001 \cdot 1002 \cdot 1003 + 2001 \cdot 2002 \cdot 2003 \cdot 2004$ на 1000.
 - (e) $(138 + 50^{1228})^{21} \cdot 48^{31}$ на 7;
 - (f) a , если $4a \equiv 1 \pmod{7}$
2. Докажите, что $1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003 - 24$ делится (a) на 999; (b) на 1004.
3. Докажите, что $30^{99} + 61^{100}$ делится на 31.
4. При каких степенях 3^k дает остаток 1 при делении на 10? А остаток 3?
5. Найдите остаток (a) 3^{1798} при делении на 10 (b) 24^{1234} при делении на 7.

Учимся думать

6. Докажите, $1^{12345} + 2^{12345} + \dots + 12344^{12345}$ делится на 12345.
7. Может ли число вида $\overline{111\dots 111}$ быть полным квадратом?
8. Докажите, что $(7^n - 5)^n - 12$ делится на $7^n - 12$.
9. Числа a, b, c — полные квадраты, причем $a + b + c$ делится на 9. Докажите, что разность каких-нибудь двух из этих чисел также делится на 9.
10. Найдите все простые числа p, q, r , удовлетворяющие равенству $p^q + q^p = r$.
11. Докажите, что натуральных чисел, которые нельзя представить в виде суммы трех кубов целых чисел, бесконечно.