

Рассуждения в графах

Степенью вершины называют количество ребер, выходящих из данной вершины.

Теорема. Число ребер в графе равно половине от суммы степеней вершин.

Лемма о рукопожатиях. В любом графе число вершин с нечётной степенью чётно.

Как могла выглядеть картинка?

1. Семь восьмиклассников поздоровались за руку. Известно, что Эзра сделал шесть рукопожатий, Никита – пять, Илья и Кирилл – по три, Максим и Рафаэль – по два, Артем – одно. Кто с кем поздоровался?

Допустим, найдутся двое незнакомых...

2. В стране Матвертикалия 21 город, некоторые из которых соединены дорогами. Из каждого города выходит хотя бы 10 дорог. Докажите, что из каждого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая другие города).
3. В стране из каждого города выходит 100 дорог и от каждого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от каждого города можно добраться до любого другого.

Посчитайте двумя способами

4. В школе каждый семиклассник дружит с 5 восьмиклассниками, а каждый восьмиклассник – с 7 семиклассниками. Кого в школе больше: восьмиклассников или семиклассников?
5. Может ли случиться, что в компании из 11 девочек и 10 мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики – с одним и тем же числом девочек?

Разнойой

6. Существует ли 8-вершинный граф, степени которого равны:
(а) 7, 7, 5, 4, 4, 2, 2, 1; (б) 7, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 1; (с) 7, 5, 5, 5, 4, 3, 2, 2?
7. На клетчатом листе закрасили 25 клеток. Может ли каждая из них иметь нечётное число покрашенных соседей?
8. В Матвертикалии 10 крупных городов и 17 маленьких. Из каждого маленького города ведет 5 дорог к крупным городам, а из каждого крупного – к 9 маленьким. Докажите, что между следующими городами есть путь по дорогам матвертикалии:
(а) Мегполис и Супергород – крупные города.
(б) Мегск и Суперск – маленькие города.
(с) Мегполисом и Мегском.
9. На кружки ходят 24 восьмиклассника, при этом каждый знает хотя бы 12 других. Докажите, что можно выбрать из них четыре человека и посадить их за круглый стол так, чтобы каждый знал двух своих соседей.
10. В супервертикали учатся 20 человек, при этом, какую бы тройку людей мы ни взяли, в ней всегда найдутся двое знакомых. Докажите, что кто-то в этой группе знает хотя бы 9 человек.

11. Каждый из 114 учащихся дружит хотя бы с 76 другими. Докажите, что тогда среди них найдутся четверо, имеющие одинаковое число знакомых.
12. В компании у каждых двух людей ровно пять общих знакомых. Докажите, что количество пар знакомых делится на 3.