Многочлены. Продолжение.

Определение. Корни многочлена $P(x)$ – это такие числа a, что $P(a) = 0$.

1. **(a)** Докажите, что у ненулевого многочлена степени n не может быть более n корней.
(b) Многочлен имеет больше корней, чем его степень. Что можно сказать о нем?

Мораль. *Надо искать в задачах многочлены, имеющие «слишком много» корней. Для этого можно рассмотреть какой-нибудь вспомогательный многочлен.*

2. **(a)** Даны два многочлена P и Q степени n. Оказалось, что в точках $a_1, \dots a_{n+1}$ многочлены P и Q совпадают. Докажите, что тогда у них равны и все коэффициенты.
(b) Можно ли это утверждать, если известно, что они совпадают в точках $a_1, \dots a_n$?

Мораль. Разные многочлены не могут совпадать в «большом» числе точек. Чтобы доказать, что два многочлена степени n равны, нужно найти хотя бы $n+1$ точку, где они совпадают.

3. Докажите, что из системы ниже следует $x = y = z = 0$:

$$\begin{cases} x + ya + za^2 = 0, \\ x + yb + zb^2 = 0, \\ x + yc + zc^2 = 0. \end{cases}$$

4. Найдите все корни уравнения, где a, b, c – различные числа:

(a) $a\dfrac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} + b\dfrac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x,$

(b) $a^2\dfrac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} + b^2\dfrac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c^2\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2.$

5. На плоскости отмечено 444 точки, причем через любые 4 точки проходит график некого квадратного трехчлена. Докажите, что все они лежат на графике одного квадратного трехчлена.

6. Даны многочлены P и Q степени больше нуля. Докажите, что если $Q(Q(x)) = P(P(x))$ и $P(P(P(x))) = Q(Q(Q(x)))$, то $P(x) = Q(x)$.

7. Есть многочлен P степени 8, причем $P(1) = P(-1), P(2) = P(-2), \dots P(4) = P(-4)$. Докажите, что $P(x) = P(-x)$.