Многочлены. Теорема Безу.

Определение. Многочлен $P(x)$ **делится** на многочлен $Q(x)$, если существует многочлен $H(x)$ такой, что $P(x) = Q(x) \cdot H(x)$.

Определение. Многочлен $P(x)$ **делится** на многочлен $Q(x)$ **с остатком** $R(x)$, если существует многочлен $H(x)$ такой, что $P(x) = Q(x) \cdot H(x) + R(x)$ и степень $R(x)$ меньше степени $H(X)$.

Вопрос. Как быстро находить эти $H(x)$ и $R(x)$? Как неполное частное и остаток ищут чисел?

1. Поделите с остатком многочлен $P(x)$ на $Q(x)$ столбиком:
(a) $P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 1, Q(x) = x - 1$
(b) $P(x) = x^5 + 3x^4 + 3x^3 + x^2 - 4x + 1, Q(x) = x^2 + x + 1$;
(c) $P(x) = x^4 + 20x$, $Q(x) = x - 2$.

2. Найдите все натуральные n, для которых число $4n^3 + 2n^2 + 4n + 7$ делится на $n + 1$.

3. **(a)** **(Теорема Безу)** Докажите, что остаток многочлена $P(x)$ при делении на $(x - a)$ равен $P(a)$ (a – это число):

$$P(x) = (x - a)H(x) + P(a).$$

(b) Докажите, что многочлен $P(x)$ делится на $(x - a)$ тогда и только тогда, когда a является корнем P, то есть $P(a) = 0$.
(c) Докажите, что если многочлен степени n со старшим коэффициентом b имеет корни $a_1, \dots a_n$, то он представляется в виде

$$P(x) = b(x - a_1) \cdot \dots \dots \cdot (x - a_n)$$

4. Найдите остаток от деления $P(x) = x^{100} - 100x^{99} + 962$ на $x + 1$.

5. Найдите все a, при которых многочлен $P(x)$ делится на многочлен $Q(x)$?
(a) $P(x) = x^{2093} + ax^{1228} + 3$, $Q(x) = x + 1$;
(b) $P(x) = x^n + ax^{n-2}$, $Q(x) = x - 2$.

6. При каких a, b многочлен $x^5 - 3x^2 + ax + b$ делится на $(x - 1)(x - 2)$?

7. Найдите остаток от деления $P(x) = x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x$ на $x^2 - 1$.