

## Подобие и пропорциональные отрезки.

### Признаки подобия треугольников.

Два треугольника подобны, если выполнено хотя бы одно из условий:

1. Два угла одного из них соответственно равны двум углам другого.
2. Две стороны одного из них соответственно пропорциональны двум сторонам другого, а углы между этими сторонами равны.
3. Три стороны одного из них соответственно пропорциональны трем сторонам другого.

**Теорема Фалеса** Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной из его сторон равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

0. Точки  $A_1$  и  $B_1$  делят стороны  $BC$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  в отношениях  $BA_1 : A_1C = 1 : 3$  и  $AB_1 : B_1C = 1 : 4$ . В каком отношении отрезок  $AA_1$  делится отрезком  $BB_1$ ?
1. (а) Докажите, что высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, разбивает треугольник на два подобных треугольника.  
(б) Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, разбивает гипотенузу на отрезки длиной 1 и 4. Найдите длину высоты.
2. Основания  $AD$  и  $BC$  трапеции  $ABCD$  равны 5 и 15 ( $AD > BC$ ). (а) Найдите длину отрезка, отсекаемого диагоналями на средней линии.  
(б) Найдите длину отрезка  $MN$ , концы которого делят стороны  $AB$  и  $CD$  в отношении  $AM : MB = DN : NC = 1 : 5$ .
3. На стороне  $AD$  параллелограмма  $ABCD$  взята точка  $P$  так, что  $AP : AD = 1 : n$ ;  $Q$  — точка пересечения прямых  $AC$  и  $BP$ . Докажите, что

$$AQ : AC = 1 : (n + 1).$$

4. На медиане  $AA_1$  треугольника  $ABC$  взята точка  $M$ , причём  $AM : MA_1 = 1 : 3$ . В каком отношении прямая  $BM$  делит сторону  $AC$ ?
5. Точки  $K$  и  $M$  лежат на сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$ , причём  $AK : BK = 3 : 2$ ,  $BM : MC = 3 : 1$ . Через точку  $B$  проведена прямая  $\ell$ , параллельная  $AC$ . Прямая  $KM$  пересекает прямую  $\ell$  в точке  $P$ , а прямую  $AC$  в точке  $N$ . Найдите  $BP$  и  $CN$ , если  $AC = 7$ .
6. Точки  $K$  и  $M$  расположены на сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$ , причём  $BK : KA = 1 : 4$ ,  $BM : MC = 3 : 2$ . Прямые  $MK$  и  $AC$  пересекаются в точке  $N$ . Найдите отношение  $AC : CN$ .

7. Точки  $M$  и  $N$  расположены на сторонах  $AB$  и  $AD$  параллелограмма  $ABCD$ , причём  $AM : MB = 1 : 2$ ,  $AN : ND = 3 : 2$ . Отрезки  $DM$  и  $CN$  пересекаются в точке  $K$ . Найдите отношения  $CK : KN$  и  $DK : KM$ .
8. На основании  $AD$  трапеции  $ABCD$  взята точка  $E$  так, что  $AE = BC$ . Отрезки  $CA$  и  $CE$  пересекают диагональ  $BD$  в точках  $O$  и  $P$  соответственно. Докажите, что если  $BO = PD$ , то  $AD^2 = BC^2 + AD \cdot BC$ .