Многочлены.

Многочленом называется выражение вида $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, где x – неизвестная (переменная), n – неотрицательное целое число, коэффициенты $a_0, \ldots, a_n$ – какие-то числа. У слова «многочлен» есть синоним – **полином**.

Число n называется **степенью** многочлена, обозначается как $degP$. Степень нулевого многочлена ($P(x) = 0$) считается $-\infty$.

Число $a_n \neq 0$ называется **старшим** коэффициентом многочлена, а a_0 – **свободным** коэффициентом.

1. Пусть степень многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ равна 4 и 5, соответственно. Какова степень многочленов $P(x) + Q(x)$, $P(x) \cdot Q(x)$, $P(Q(x))$?

2. Дан многочлен $P(x-1) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$. Найдите многочлен $P(x)$.

3. Какими должны быть p и q, чтобы выполнялось равенство
$Ax^4 + Bx^2 + C = A(x^2 + px + q)(x^2 - px + q)$?

4. Пусть $f(x) = x^2 + px + q$. При каких p и q выполняются равенства $f(p) = f(q) = 0$?

5. Андрей загадал некоторый многочлен P. Иван может попросить его посчитать значение P в любой точке a – то есть посчитать число $P(a)$. Помогите Ивану...
(a) узнать свободный член P;
(b) узнать сумму коэффициентов многочлена P;
(c) узнать сумму коэффициентов при четных степенях.

6. Докажите, что если привести многочлен $(x^3 - x^2 + 1)^{2020}$ к стандартному виду, то какой-то из коэффициентов будет отрицательным.

7. У многочленов P и Q все коэффициенты – целые нечетные числа (в частности, все $a_k \neq 0$, при $k \leqslant n$). Докажите, что их произведение $P \cdot Q$ содержит хотя бы один четный коэффициент.

8. **(a)** Докажите, что если для многочлена Q выполнено $Q(y) = Q(-y)$ для любой точки y, то коэффициенты при **нечетных** степенях равны 0.
(b) Докажите, что если для многочлена Q выполнено $Q(y) = -Q(-y)$ для любой точки y, то коэффициенты при **четных** степенях равны 0.