

Индукция в графах.

0. Докажите по индукции, что граф, в котором степень каждой вершины не более 6, можно покрасить в 7 цветов правильным образом (т. е. так, что любые две вершины, соединенные ребром, покрашены в разные цвета).
1. В некоторой стране каждые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что есть город, из которого можно доехать до любого другого.
2. В некоторой стране каждый город соединён с каждым дорогой. Докажите, что можно ввести на дорогах одностороннее движение так, чтобы выехав из любого города, в него нельзя было вернуться.
3. В некоторой стране каждые два города соединены дорогой с односторонним движением. Доказать, что можно проехать по всем городам, побывав в каждом по одному разу.
4. В компании из n человек ($n > 3$) у каждого появилась новость, известная ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за $2n - 4$ разговора все они могут узнать все новости.
5. Доказать, что после окончания однокругового турнира по теннису его участников можно выстроить в ряд так, что каждый выиграл у следующего за ним в этом ряду.
6. Дан граф, содержащий $2n$ вершин и не менее $n^2 + 1$ ребро. Докажите, что в нем есть три вершины, попарно соединённые ребрами.