

СВЯЗНОСТЬ

Определения. Граф называется *связным*, если от любой вершины можно добраться до любой другой по рёбрам. Множество всех вершин, до которых можно добраться по рёбрам от одной и той же вершины, называется *компонентой связности*.

Лемма о рукопожатиях. Сумма степеней всех вершин графа (а также каждой компоненты связности) чётна.

1. Из одной (определенной) вершины графа существует путь в любую другую вершину графа. Докажите, что граф связан.
2. Из Столицы выходит 101 дорога, из Деревни — всего три, а из всех остальных городов выходят по 10 дорог. Никакие две дороги не пересекаются. Докажите, что из Деревни можно доехать до Столицы.
3. В стране 25 городов, каждый город соединён дорогой не менее чем с 12 другими городами. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого.
4. В Матвертикалии 12 станций метро, соединённых 56 перегонами (две станции соединяются не более чем одним перегоном). Докажите, что метрополитен связан.
5. Из полного 100-вершинного графа выкинули 98 рёбер. Докажите, что он остался связным.
6. (a) Степень каждой вершины связного графа не менее 1000. Одно ребро выкинули. Может ли получиться несвязный граф? (b) А если степени всех вершин ровно 1000?
7. В некоторой стране любые два города соединены либо железной дорогой, либо авиалинией. Докажите, что одним из этих двух видов транспорта можно добраться из любого города в любой другой.
8. Имеются две страны: Обычная и Зазеркалье. У каждого города в Обычной стране есть «двойник» в Зазеркалье, и наоборот. Однако если в Обычной стране какие-то два города соединены железной дорогой, то в Зазеркалье эти города не соединены, а каждые два несоединённых в Обычной стране города обязательно соединены железной дорогой в Зазеркалье. В Обычной стране девочка Алиса не может проехать из города А в город В, сделав менее двух пересадок. Доказать, что Алиса в Зазеркалье сможет проехать из любого города в любой другой, сделав не более двух пересадок.