Метод математической индукции - 2.

1. Докажите с помощью индукции, что

(a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1) \cdot n = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$;

(b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

(c) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$;

(d) $\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{9}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{n+1}{2n}$.

2. Докажите с помощью индукции, что

(a) $6^{2n+1} + 1$ делится на 7;

(b) $5 \cdot 2^{3n+1} + 3^{3n+2}$ делится на 19;

(c) $3^{2n+2} + 8n - 9$ делится на 16;

(d) $2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$ делится на 17.

3. На полке стоит 55 томов собрания сочинений В. И. Ленина. За раз разрешается взять несколько подряд идущих томов и переставить их в обратном порядке. Докажите, что такими операциями можно расставить тома по порядку.

4. На плоскости расположено несколько прямых и окружностей. Докажите, что части, на которые они разбивают плоскость, можно покрасить в два цвета так, что любые две части, имеющие общий участок границы, покрашены в разные цвета.

5. На сколько частей делят плоскость n прямых, среди которых нет параллельных, и никакие три не пересекаются в одной точке?