Метод математической индукции.

Идея: пусть дана последовательность утверждений A_1, A_2 и т.д. Метод математической индукции основан на доказательстве первого из них (*базы индукции*) и доказательстве того, что из n-го утверждения следует $(n+1)$-ое (*индукционный переход*). Мы доказываем, что очередное утверждение (A_n) верно, считая известным, что все предыдущие утверждения (A_k при $k < n$) верны. Это позволяет нам утверждать, что все утверждения A_n верны.

0. Показать, что любую сумму, начиная с 8 копеек, можно уплатить монетами в 3 и 5 копеек.

0. Докажите, что $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

0. Несколько прямых делят плоскость на части. Доказать, что можно раскрасить эти части в белый и чёрный цвет так, чтобы соседние части (имеющие общий отрезок границы) были разного цвета.

1. Докажите, что $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$.

2. Докажите, что
$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Торт разрезали прямолинейными разрезами на несколько кусков. Оказалось, что одна сторона у ножа была грязная. Докажите, что всегда найдется хотя бы один чистый кусок.

4. Для любого натурального n доказать, что выражение $10^n + 18n - 1$ делится на 27.

5. Доказать, что квадрат **(a)** 4×4; **(b)** 8×8; **(c)** $2^n \times 2^n$ с вырезанной угловой клеткой можно разрезать на уголки из трех клеток.

6. На столе стоят 32 стакана с водой. Разрешается взять любые два стакана и уровнять в них количества воды, перелив часть воды из одного стакана в другой. Докажите, что с помощью таких операций можно уравнять количество воды в стаканах.

7. В таблице 3×100 (3 строки, 100 столбцов) расставлены фишки трех цветов по 100 штук каждого цвета. Докажите, что переставляя фишки в строках, можно сделать так, чтобы в каждом столбце были фишки трех цветов.