Сравнения.

Определение. Разделить целое число a на натуральное число b — значит найти такие целые числа q и r, что $a = bq+r$. При этом требуется выполнение неравенства $0 \leqslant r < b$. Числа q и r называются неполным частным и остатком при делении a на b.

Определение 1. Целые числа a и b сравнимы по модулю натурального числа n, если они дают одинаковые остатки при делении на n.

Определение 2. Целые числа a и b сравнимы по модулю натурального числа n, если их разность делится на n.

Свойства сравнений:

· Если $a \equiv b \ mod \ n$, то $a + c \equiv b + c \ mod \ n$.

· Если $a \equiv b \ mod \ n$, то $ac \equiv bc \ mod \ n$.

· Если $a \equiv b \ mod \ n$, а $b \equiv c \ mod \ n$, то $a \equiv c \ mod \ n$.

· Если $a \equiv b \ mod \ n$, а $c \equiv d \ mod \ n$, то $a + c \equiv b + d \ mod \ n$.

· Если $a \equiv b \ mod \ n$, а $c \equiv d \ mod \ n$, то $ac \equiv bd \ mod \ n$.

· Если $a \equiv b \ mod \ n$, то $a^k \equiv b^k \ mod \ n$.

1. Проверьте эквивалентность определений 1 и 2.

2. Найдите остаток от деления:
(a) $1001 \cdot 1002 \cdot 1003 + 2001 \cdot 2001 \cdot 2002 \cdot 2003 \cdot 2004$ на 1000;
(b) $2015 \cdot 2016 \cdot 2017 \cdot 2018 \cdot 2019$ на 11;
(c) $2017 \cdot 2016 \cdot 2015 + 2019 \cdot 2020 \cdot 2021$ на 2018;
(d) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot 101 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 102$ на 103.

3. Найдите остаток от деления:
(a) 8^{2019} на 7; **(b)** 6^{2019} на 7; **(c)** 3^{2019} на 7.

4. Найдите остаток от деления:
(a) $9^{2019} + 13^{2019}$ на 11;
(b) $7^{2012} + 9^{2015}$ на 10;
(c) $9^{2018} + 13^{2018}$ на 11.

5. Докажите, что $1^{45} + 2^{45} + ... + 38^{45}$ делится на 13.

6. Докажите, что число $5^{2019} + 18$ составное.

7. Пусть $3x + 7y \equiv 1 \ (mod \ 11)$.
(a) Докажите, что $3x + 40y \equiv 1 \ (mod \ 11)$;

(b) Найдите остаток от деления $14x - 15y$ на 11;
(c) Найдите остаток от деления $6x + 3y$ на 11.