Неравенства о средних.

Во всех задачах все числа — положительные.
Для любых положительных чисел a и b справедливы неравенства:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}},$$

причем каждое из неравенств обращается в равенство, только когда числа a и b равны.
Эти выражения (слева направо) называются *среднее квадратическое, среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее гармоническое.*
Неравенство $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ также называется *неравенством Коши.*

1. Докажите, что $\frac{x+1}{2} \geqslant \frac{2}{1+\frac{1}{x}}$.

2. Докажите, что **(a)** $a+\frac{1}{16a} \geqslant \frac{1}{2}$; **(b)** $x^3y+xy^3 \geqslant 2x^2y^2$.

3. Найдите наименьшее значение выражения **(a)** $x+\frac{1}{x}$; **(b)** $3x+\frac{1}{4x}$.

4. Докажите, что
(a) $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \geqslant 4$;
(b) $(a+b+c+d)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}) \geqslant 16$.

5. Докажите, что среди прямоугольников с фиксированной площадью наименьший периметр имеет квадрат.

6. Что больше: $\sqrt{2017}+\sqrt{2019}$ или $2\sqrt{2018}$?

7. Пусть $xy=50$. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{x}{2}+y$.

8. Докажите, что при $n>1$ верно неравенство:

$$\frac{2}{\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}} \leqslant n.$$