

## Деревья

Опала листва.  
Весь мир одноцветен.  
Лишь ветер гудит.

Мацуо Басе

**Определения.** Граф называется *связным*, если от любой вершины можно добраться до любой другой по ребрам. *Циклом* в графе называется замкнутый путь, не проходящий ни по какому ребру графа два раза.

*Деревом* называется связный граф без циклов. *Висячей вершиной* называется вершина степени 1.

0. (а) Докажите, что если в связном графе есть цикл, то из него можно удалить ребро таким образом, чтобы он остался связным.  
(б) Докажите, что если между двумя вершинами есть 2 различных пути, то в графе существует цикл.  
(с) Докажите, что если граф связан и не имеет циклов, то между двумя любыми вершинами существует ровно один путь.
1. Докажите, что если в дереве не менее двух вершин, то в нём существует: а) висячая вершина; б) две висячие вершины.
2. **Теорема.**
  - а) В дереве с  $n$  вершинами ровно  $n-1$  ребро.
  - б) Если в связном графе  $n-1$  ребро, то это — дерево.
3. Существует ли дерево на 9 вершинах, в котором 2 вершины имеют степень 5?
4. Степени вершин дерева равны 5, 4, 3, 2, 1, 1, ..., 1. Сколько в этом графе висячих вершин?
5. **Лемма о существовании остовного дерева (скелета).** Докажите, что из каждого связного графа можно удалить некоторое число ребер так, чтобы получилось дерево.
6. Существует ли граф, у которого есть два остовных дерева без общих ребер?
7. В Супермегии  $N$  городов. Президент издал указ связать их железными дорогами в единую сеть. Каждая ветка связывает два города, не пересекаясь с другими ветками. Докажите, что всего понадобится не менее  $N - 1$  веток.
8. Можно ли раскрасить рёбра куба в два цвета так, чтобы по рёбрам каждого цвета можно было пройти из любой вершины в любую другую?
9. В марсианском метро с любой станции можно проехать на любую другую. Докажите, что можно закрыть на ремонт некоторую станцию и запретить проезд через неё так, что по-прежнему можно будет с любой оставшейся станции проехать на любую другую.