

Вспомогательная раскраска.

1. Из шахматной доски вырезали клетки $a1$ и $h8$, можно ли получившуюся доску замостить доминошками (прямоугольниками 1×2)?
2. Пусть есть фигура состоящая из клеточек, раскрашенная шахматной раскраской. Всегда ли её можно замостить доминошками, если количество белых и черных клеток совпадает?
3. (а) Нарисуйте всевозможные фигурки «тетриса», то есть состоящие из 4 клеток. В каких из них при шахматной раскраске число белых и чёрных клеток различно?
(б) Можно ли из всех пяти фигур тетриса, сложить прямоугольник размером 4×5 ?
(с) Можно ли доску 50×50 разрезать на Т-фигурки «тетриса»?
4. На каждой клетке доски размера 9×9 сидел жук. В полдень каждый жук переполз на соседнюю по стороне клетку. Докажите, что теперь по крайней мере одна клетка будет свободной.
5. На каждой клетке доски размера 9×9 сидел жук. В полдень каждый жук переполз на соседнюю по диагонали клетку. Докажите, что теперь по крайней мере 9 клеток будут свободными.
6. Доска 8×8 покрыта костями домино. Восемь костей покрывают клетки диагонали, некоторые при этом закрывают еще клетку выше диагонали, другие — ниже диагонали. Докажите, что тех и других костей поровну.
7. Можно ли разрезать доску (а) 6×6 на четырехклеточные фигуры типа Г; (б) прямоугольники 1×4 ?
8. В левый нижний угол шахматной доски 8×8 поставлено в форме квадрата 3×3 девять фишек. Фишка может прыгать на свободное поле через рядом стоящую фишку, то есть симметрично отражаться относительно её центра (прыгать можно по вертикали, горизонтали и диагонали). Можно ли за некоторое количество таких ходов поставить все фишки вновь в форме квадрата 3×3 , но в другом углу: (а) левом верхнем, (б) правом верхнем?