

Многочлены.

Многочленом называется выражение вида $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, где x – неизвестная (переменная), n – неотрицательное целое число, коэффициенты a_0, \dots, a_n – какие-то числа. У слова «многочлен» есть синоним – **полином**.

Число n называется **степенью** многочлена, обозначается как $\deg P$. Степень нулевого многочлена ($P(x) = 0$) считается $-\infty$.

Число $a_n \neq 0$ называется **старшим** коэффициентом многочлена, а a_0 – **свободным** коэффициентом.

1. Пусть степень многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ равна 4 и 5, соответственно. Какова степень многочленов $P(x) + Q(x)$, $P(x) \cdot Q(x)$, $P(Q(x))$?
2. Многочлен $P(x)$ имеет степень 2, старший коэффициент тоже равен двум и известно, что
 - (a) $P(5) = P(3) = 0$.
 - (b) $P(4) = 1, P(-2) = -1$.Найдите $P(x)$.
3. Дан многочлен $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x - 4$. Найдите многочлен $P(x + 1)$.
4. Дан многочлен $P(x - 1) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$. Найдите многочлен $P(x)$.
5. Какими должны быть p и q , чтобы выполнялось равенство $Ax^4 + Bx^2 + C = A(x^2 + px + q)(x^2 - px + q)$?
6. Пусть $f(x) = x^2 + px + q$. При каких p и q выполняются равенства $f(p) = f(q) = 0$?
7. Андрей загадал некоторый многочлен P . Иван может попросить его посчитать значение P в любой точке a – то есть посчитать число $P(a)$. Помогите Ивану...
 - (a) узнать свободный член P ;
 - (b) узнать сумму коэффициентов многочлена P ;
 - (c) узнать сумму коэффициентов при четных степенях.
8. Докажите, что если привести многочлен $(x^3 - x^2 + 1)^{2020}$ к стандартному виду, то какой-то из коэффициентов будет отрицательным.
9. У многочленов P и Q все коэффициенты – целые нечетные числа (в частности, все $a_k \neq 0$, при $k \leq n$). Докажите, что их произведение $P \cdot Q$ содержит хотя бы один четный коэффициент.