Алгоритм Евклида

По умолчанию все числа в листочке являются целыми.

Определение. **Наибольшим общим делителем (НОД)** чисел a и b называется наибольшее натуральное число d такое, что a и b делятся на d. Обозначение: $d = (a, b)$.

1. Найдите **(a)** $(78, 42)$; **(b)** $(427, 990)$; **(c)** $(73! + 74!, 75!)$; **(d)** $(21a + 14, 15a + 10)$.

2. У доктора Пилюлькина есть чашечные весы, гирьки 2020 г и 73 г, много песка и очень много терпения. Докажите, что он сможет отмерить на этих весах 49 г ценного лекарства.

3. На столе лежит клетчатая шоколадка 56×12. Каждую минуту от неё отламывают квадратик наибольшего возможного размера и кладут в тарелку. Какая сторона будет у самого маленького квадратика в тарелке?

4. Есть два угольника (с углами $13°$ и $145°$) и карандаш. Как с их помощью построить угол $5°$?

5. Докажите, что **(a)** любой делитель a и b является делителем $a-b$ и b; **(b)** любой делитель $a - b$ и b является делителем a и b;
(c) Пусть $(a - b, b) = d$. Может ли $(a, b) = e$, где $e > d$ и почему?
(d) Докажите, что $(a - b, b) = (a, b)$.
(e) Докажите, что если $a = bq + r$, то $(a, b) = (b, r)$.

Алгоритм Евклида — способ найти НОД двух натуральных чисел, последовательно заменяя пару исходных чисел на пару из меньшего числа и остатка от деления большего на меньшее.

$$\begin{array}{ccccccc}
a & = & b & \cdot & q_1 & + & r_1 \\
b & = & r_1 & \cdot & q_2 & + & r_2 \\
r_1 & = & r_2 & \cdot & q_3 & + & r_3 \\
 & \dots & & & & & \\
r_{n-1} & = & r_n & \cdot & q_{n+1} & + & r_{n+1} \\
r_n & = & r_{n+1} & \cdot & q_{n+2} & + & 0
\end{array}$$

6. Найдите с помощью алгоритма Евклида: **(a)** $(233, 144)$; **(b)** $(12751, 10537)$;
(c) $(2^{15} - 1, 2^6 - 1)$; **(d)** $(\underbrace{11\ldots1}_{51}, \underbrace{11\ldots1}_{85})$; **(e)** $(2^{123} - 1, 2^{222} - 1)$.

7. Докажите, что $(5a + 3b, 13a + 8b) = (a, b)$.

8. **(a)** Докажите, что числа $n+4$ и $2n+7$ взаимно просты при любом натуральном n.
(b) Докажите, что дробь $\dfrac{21n + 4}{14n + 3}$ несократима при любом натуральном n.

9. Докажите, что алгоритм Евклида находит НОД пары чисел за конечное число шагов.