

## Метод математической индукции.

- 1. Доказать, что квадрат (а)  $4 \times 4$ ; (б)  $8 \times 8$ ; (с)  $16 \times 16$ ; с вырезанной угловой клеткой можно разрезать на уголки из трех клеток.
0. Головоломка «Ханойские башни» представляет собой  $N$  дисков, нанизанных в порядке уменьшения размеров на один из трех кольшкков. Требуется переместить всю башню на другой кольшек, перенося каждый раз только один диск и не помещая больший диск на меньший. Докажите, что головоломка имеет решение для
- (а)  $N = 4$ ;  
 (б)  $N = 5$ .

Часто требуется доказать утверждение типа: «Для каждого натурального  $n$  верно, что ...». Такое утверждение можно рассматривать, как цепочку утверждений «Для  $n = 1$  верно, что ...», «Для  $n = 2$  верно, что ...» и т.д.

*Метод математической индукции* состоит в том, чтобы доказать первое из этих утверждений (называемое **базой** или основанием индукции), что обычно достаточно просто сделать, а затем доказать **шаг** (или **переход**) индукции: «Если верно утверждение с номером  $n$ , то верно утверждение с номером  $(n + 1)$ ».

Если верна база индукции и верен шаг индукции, то все утверждения верны.

- Решите задачу -1 для квадрата  $2^n \times 2^n$  для произвольного  $n$ .
- Решите задачу 0 для произвольного  $N$ ,
- Плоскость поделена на области несколькими прямыми. Докажите, что области можно раскрасить в два цвета, чтобы соседние области имели разный цвет.
- Докажите тождества *методом математической индукции*:
 

(а)  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(б)  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ .

(с)  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ;

(д)  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ ;

(е)  $(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9}) \dots (1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$ .
- Торт разрезали прямолинейными разрезами на несколько кусков. Оказалось, что одна сторона у ножа была грязная. Докажите, что всегда найдется хотя бы один чистый кусок.