Деление с остатком 2.

Определение. Пусть a – целое число, b – натуральное число. Говорят, что a делится на b с *остатком* r, если $a = b \cdot q + r$, причём q – целое, и $0 \leqslant r < b$.
a - **делимое** (целое);
b - **делитель** (натуральное число);
q - **частное** (целое число);
r - **остаток** (целое число, от 0 до b-1 включительно).

1. Оба числа x, y дают остаток r, а z, t – остаток s при делении на b. Докажите, что следующие пары чисел дают одинаковые остатки при делении на b:
(a) $x + z$ и $r + s$
(b) $x + z$ и $y + t$;
(c) $x - z$ и $y - t$;
(d) kx и kr, где k – целое число;
(e) xz и rs; xz и yt;
(f) x^2 и r^2;
(g) x^n и r^n; x^n и y^n, число n – натуральное;
(h) $x^4 \cdot z \cdot y^4 - 11t^5$ и $x \cdot y^7 \cdot z - 11z^5$.

2. В ряд записаны 10 натуральных чисел. Докажите, что можно выбрать группу из одного или нескольких чисел подряд так, чтобы сумма делилась **(a)** на 3; **(b)** на 4.

3. Докажите, что $n^3 + 2n$ делится на 3 при любом натуральном n.

4. Докажите, что $n^5 + 4n$ делится на 5 при любом натуральном n.

5. Докажите, что $n^3 - n$ делится на 24 при любом нечетном n.

6. Натуральные числа x, y и z таковы, что $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на три.

7. Сумма квадратов двух натуральных чисел делится на 21. Докажите, что эта сумма делится на 441.