

Графы-2

Определение. *Степенью вершины* графа называется число ребер, выходящих из этой вершины.

1. На планете 4M44V население живёт на 27 летающих островах. Для сообщения между ними перекинуты подвесные мосты, из каждого острова по 4. Сколько всего подвесных мостов на планете?
2. Во дворе стоят 10 берёз и 6 фонарных столбов. Между ними натянуты бельевые веревки так, что к каждому столбу привязано 7 веревок, а к каждой березе — 5. Сколько во дворе бельевых веревок?

Лемма. Сумма степеней всех вершин графа - чётное число, равное удвоенному количеству рёбер графа.

3. Однажды на планете 4M44V, при планировании системы мостов решили, что количество мостов, выходящих из островов должно зависеть от размера острова. На планете 4 больших, 14 средних и 9 маленьких островов. В Министерстве Мостов посчитали, что из каждого большого острова должно выходить по 6 мостов, из среднего – по 4, а из маленьких по 3. Можно ли так выстроить систему сообщения между островами?
4. У короля 19 баронов-вассалов. Может ли оказаться, что у каждого вассального баронства 1, 5 или 9 соседних баронств?

Лемма о рукопожатиях. В любом графе число вершин нечётных степеней чётно.

5. На пару опять пришло 13 человек. Может ли случиться так, что каждая девочка знакома ровно с тремя из присутствующих на паре мальчиков, а каждый мальчик ровно с пятью девочками?
6. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?
7. В стране Оз есть много городов, некоторые из которых соединены дорогами. Каждая из дорог вымощена либо жёлтым кирпичом, либо красным, либо зелёным. Известно, что из Изумрудного города выходит ровно одна дорога, а из всех остальных городов — по три дороги. Докажите, что в стране Оз есть город, из которого выходят две дороги одного цвета.
- 8.* **(Попробуем доказать лемму)** (а) Докажите, что сумма степеней вершин графа, деленная на 2, равна количеству ребер в графе.
(б) Докажите, что количество вершин, из которых выходит нечетное число ребер, четно.