Остатки. Марш.

Ты был прав, Смит. Ты всегда был прав. Это действительно неизбежно.

Матрица: Революция

Совет. Держите перед глазами прошлый листочек.
Приступайте к задачам 4-11 **ТОЛЬКО** после решения задачи 3.

1. Числа 2146, 1991 и 1805 дают одинаковые остатки при делении на натуральное число n. Найдите n.

2. Натуральное число а таково, что $a+2$ делится на 5. Докажите, что $47a+44$ также делится на 5.

3. Какие остатки может давать квадрат натурального числа при делении на 3? На 4? На 8? на 9? Нарисуйте четыре таблички с двумя строками (остаток числа и его квадрата).

При решении следующих задач держите таблички перед собой!

Тот факт, что среди остатков квадратов встречаются не все возможные остатки, часто помогает в решении задач.

4. **(a)** Докажите, что для нечетного n число n^2+3 делится на 4.
(b) Докажите, что n^3+5 не делится на 9.
(c) Докажите, что n^5-n^3 делится на 8.

5. Натуральные числа x, y, z таковы, что $x^2+y^2=z^2$. Докажите, что хотя бы одно из них делится на 3.

6. **(a)** Известно, что $a^2+b^2 \vdots 3$. Докажите, что оно делится и на 9;
(b) Известно, что $a^2+b^2 \vdots 7$. Докажите, что оно делится и на 49.

7. Целые числа x, y, z, t таковы, что $x^2+y^2=3(z^2+t^2)$.
(a) Докажите, что x и y кратны 3.
(b) Докажите, что все четыре числа кратны 3.
(c*) Докажите, что $x=y=z=t=0$.

8. Докажите, что квадрат натурального числа, большего 10, не может быть составлен только из цифр **(a)** 1; **(b)** 1, 5 и 9.

9. Сумма трёх натуральных чисел, являющихся точными квадратами, делится на 9. Докажите, что из них можно выбрать два, разность которых также делится на 9.

10. Сумма трех натуральных чисел делится на 6. Докажите, что сумма их кубов тоже делится на 6.

11. Найдите все натуральные n, что $2^n+7=a^2$ для некоторого натурального a.