Остатки. Внимание.

Выбор. Вся проблема в выборе.

Матрица: Перезагрузка

Определение. *Остатком* числа a при делении на натуральное число b называется такое число r, что $a = b \cdot q + r$ для некоторого целого x и $0 \leqslant r < b$.

Примеры.
(a) Число 122 дает остаток 2 при делении на 10: $122 = 12 \cdot 10 + 2$;
(b) Число -11 дает остаток 1 при делении на 3: $-11 = 3 \cdot (-4) + 1$;

Осознайте! Два числа дают одинаковый остаток при делении на b тогда и только тогда, когда их разность делится на b.

Очень важное упражнение. Используйте определение!

1. Оба числа x, y дают остаток r, а z, t – остаток s при делении на b. Докажите, что следующие пары чисел дают одинаковые остатки при делении на b:
(a) $x + z$ и $r + s$
(b) $x + z$ и $y + t$;
(c) $x - z$ и $y - t$;
(d) kx и kr, где k – целое число;
(e) xz и rs; xz и yt;
(f) x^2 и r^2;
(g) x^n и r^n; x^n и y^n, число n – натуральное;
(h) $x^4 \cdot z \cdot y^4 - 11t^5$ и $x \cdot y^7 \cdot z - 11z^5$.

Мысль №1. Вычисляя остаток от деления некоторого арифметического выражения на некоторое число a, можно заменять числа на их остатки при делении на a. Например, найдем остаток от деления числа $16 \cdot 17 \cdot 19$ на 3. Он будет таким же, как у $1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$.

Мысль №2. А можно заменять и не на остатки! Если какое-то другое число удобнее и остаток у него правильный, смело меняйте на него. Пример: ищем остаток при делении числа 20^{14} на 7. Можно было бы заменить 20 на 6, но это дает мало пользы. Зато если заменить 20 на -1, получится $(-1)^{14} = 1$.

2. Вычислите остаток числа:
(a) $5 \cdot 6 \cdot 7$ при делении на 4;
(b) 14^{15} на 13;
(c) 12^9 на 13;
(d) $1001 \cdot 1002 \cdot 1003 + 2001 \cdot 2002 \cdot 2003 \cdot 2004$ на 1000.
(e) $(118 + 17^{17})^{21} \cdot 7^{49}$ на 8;

3. Докажите, что $1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003 - 24$ делится **(a)** на 999; **(b)** на 1004.

4. Докажите, что $30^{99} + 61^{100}$ делится на 31.

5. При каких степенях 3^k дает остаток 1 при делении на 10? А остаток 3?

6. Найдите остаток **(a)** 3^{1798} при делении на 10 **(b)** 17^{100} при делении на 7.