

Лемма о рукопожатиях

"В связи с эпидемией
коронавируса, пожалуйста,
никаких рукопожатий!"

РИА новости

Определение. Степенью вершины графа называется число ребер, выходящих из этой вершины.

- (a) У каждого жителя Матвертикалии ровно 3 руки. Однажды 6 жителей взяли за руки так, что свободных рук не осталось. Сколько получилось «рукопожатий»?

(b) Подошел еще один житель. Могут ли теперь все семеро взяться за руки, чтобы свободных рук не осталось?
- В Трехдорожном королевстве из каждого города выходит ровно 3 дороги в другие города королевства. А может ли в нем быть ровно 1000 городов?
- В турнире участвовали 1 команда из Москвы, 15 команд из Санкт-Петербурга и 50 команд из Новосибирска. Сколько было проведено игр, если московская команда сыграла 20 игр, петербургские – по 4 игры, а новосибирские команды по одной игре?
- Некоторые ученики кружка дружат между собой. Всего на кружке 23 человека. Может ли оказаться так, что у каждого из детей 3, 5 или 9 друзей?
- (Лемма о рукопожатиях)** (a) Докажите, что сумма степеней вершин графа, деленная на 2, равна количеству ребер в графе.

(b) Докажите, что количество вершин, из которых выходит **нечетное** число ребер, четно.
- Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?
- На занятие кружка пришли 22 школьника, в том числе и Вика. Преподаватель спросил у каждого из них, кроме Вики, сколько у них знакомых среди остальных ребят. В ответ прозвучали только числа 11 и 5. Докажите, что Вика знает кого-нибудь из пришедших.
- В Матвертикалии из города Суперска выходит 31 дорога, а из города Ультрийск – только одна. Из всех остальных городов выходит по 10 дорог. Докажите, что по этим дорогам из Ультрийска можно попасть в Суперск.
- В Матвертикалии из каждого города выходит 444 дорог, причем от каждого города можно добраться до любого другого. Мэр города закрыл одну из дорог. Докажите, что от каждого города все равно можно доехать до любого другого.