

Делимость

- Если $a \dot{\vdots} c$ и $b \dot{\vdots} c$, то выполнено $a + b \dot{\vdots} c$ и $a - b \dot{\vdots} c$.
- Если $a \dot{\vdots} c$, то для любого целого b верно $a \cdot b \dot{\vdots} c$.
- Если $a \dot{\vdots} b$ и $b \dot{\vdots} c$, то $a \dot{\vdots} c$.
- Если $ab \dot{\vdots} c$ и у чисел a и c нет общих делителей, то $b \dot{\vdots} c$.

— Еще нужно что-нибудь?

— Быть может, вдохновение.

Парфюмер: История одного убийцы

1. Докажите, что если $11m + 4n \dot{\vdots} 6$, то и $m + 8n \dot{\vdots} 6$.
2. Может ли остаток от деления простого числа на 30 быть составным числом?
3. У Маши и Вики было одинаковое количество конфет. Маша съела в 8 раз меньше конфет, чем Вика, а осталось у нее в 9 раз больше конфет, чем у Вики. Докажите, что изначально количество конфет у каждой из девочек делилось на 71.
4. Целые числа a и b подобраны так, что число $A = (19a + 20b)(20a + 19b)$ делится на 13. Доказать, что число A делится на 169.
5. Докажите, что число $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ делится на 9 тогда и только тогда, когда $a_1 + \dots + a_n$ делится на 9.
6. Про четыре числа известно, что сумма любых трёх из них делится на 7. Докажите, что все эти числа кратны 7.
7. Докажите, что если $8a + 13b$ делится на 43, то $a + 7b$ также делится на 43.
8. Найдите все целые x и y , для которых выполняется
 - (a) $x^2 - y^2 = 7$;
 - (b) $x^2 - y^2 = 16$.
9. Простые числа p и q и натуральное число n таковы, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{pq} = \frac{1}{n}$. Найдите эти числа.
10. Можно ли так подобрать четыре попарно различных натуральных числа, чтобы каждое из них делилось на разность любых двух из трёх оставшихся?