

## Делимость

- Если  $a \dot{\vdots} c$  и  $b \dot{\vdots} c$ , то выполнено  $a + b \dot{\vdots} c$  и  $a - b \dot{\vdots} c$ .
- Если  $a \dot{\vdots} c$ , то для любого целого  $b$  верно  $a \cdot b \dot{\vdots} c$ .
- Если  $a \dot{\vdots} b$  и  $b \dot{\vdots} c$ , то  $a \dot{\vdots} c$ .
- Если  $ab \dot{\vdots} c$  и у чисел  $a$  и  $c$  нет общих делителей, то  $b \dot{\vdots} c$ .

— Еще нужно что-нибудь?

— Быть может, вдохновение.

---

Парфюмер: История одного убийцы

1. Докажите, что если  $11m + 4n \dot{\vdots} 6$ , то и  $m + 8n \dot{\vdots} 6$ .
2. Может ли остаток от деления простого числа на 30 быть составным числом?
3. У Маши и Вики было одинаковое количество конфет. Маша съела в 8 раз меньше конфет, чем Вика, а осталось у нее в 9 раз больше конфет, чем у Вики. Докажите, что изначально количество конфет у каждой из девочек делилось на 71.
4. Целые числа  $a$  и  $b$  подобраны так, что число  $A = (19a + 20b)(20a + 19b)$  делится на 13. Доказать, что число  $A$  делится на 169.
5. Докажите, что число  $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$  делится на 9 тогда и только тогда, когда  $a_1 + \dots + a_n$  делится на 9.
6. Про четыре числа известно, что сумма любых трёх из них делится на 7. Докажите, что все эти числа кратны 7.
7. Докажите, что если  $8a + 13b$  делится на 43, то  $a + 7b$  также делится на 43.
8. Найдите все целые  $x$  и  $y$ , для которых выполняется
  - (a)  $x^2 - y^2 = 7$ ;
  - (b)  $x^2 - y^2 = 16$ .
9. Простые числа  $p$  и  $q$  и натуральное число  $n$  таковы, что  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{pq} = \frac{1}{n}$ . Найдите эти числа.
10. Можно ли так подобрать четыре попарно различных натуральных числа, чтобы каждое из них делилось на разность любых двух из трёх оставшихся?