

Разложение на простые множители

Бог создал целые числа, всё
остальное — дело рук человека.

Леопольд Кронекер

Основная теорема арифметики. Каждое натуральное число n можно представить в виде произведения степеней простых множителей $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ с точностью до перестановки множителей.

1. На планете Матвертикалия неделя состоит из нескольких суток, сутки — из нескольких часов, час — из нескольких минут, минута — из нескольких секунд. Известно, что в одних сутках 1001 секунда, а в одной неделе 715 минут. Найдите, сколько на Матвертикалии секунд в часе, если минут в часе меньше, чем часов в сутках. Слово «несколько» означает «больше одного».
2. Лена умножила число на сумму его цифр и получила 2008. Какое число она загадала?
3. Илья утверждает, что может получить число 10 000 000 000, перемножив два числа, в записи которых нет нулей. Не ошибается ли он?
4. Произведение возрастов Машиных братьев равно 1664, причём старший брат вдвое старше младшего. Сколько у Маши братьев? Какого они возраста?
5. (a) Числа от 3 до 6 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе нацело делится на произведение чисел во второй. Какое наименьшее значение может быть у частного от деления первого произведения на второе?
(b) То же для чисел от 1 до 10.
6. Кирилл нашел наименьшее натуральное число, которое делится на $1, \dots, 100$. Алёша нашел наименьшее число, которое делится на числа $51, \dots, 100$. Докажите, что числа у Лёши и Кирилла совпадают.
7. Докажите, что у уравнения $y^2 = 2x^2$ нет решений в натуральных числах.
8. На доске выписаны числа $1, 2, \dots, 100$. На каждом этапе одновременно стираются все числа, не имеющие среди нестертых чисел делителей, кроме себя самого. Например, на первом этапе стирается только число 1. Какие числа будут стерты на третьем этапе? А на последнем этапе?