

## Остатки.

**Определение.** *Остатком* числа  $a$  при делении на натуральное число  $b$  называется такое число  $r$ , что  $a = b \cdot q + r$  для некоторого целого  $q$  и  $0 \leq r < b$ .

### Примеры.

(а) Число 122 дает остаток 2 при делении на 10:  $122 = 12 \cdot 10 + 2$ ;

(б) Число -11 дает остаток 1 при делении на 3:  $-11 = 3 \cdot (-4) + 1$ ;

**Осознайте!** Два числа дают одинаковый остаток при делении на  $b$  тогда и только тогда, когда их разность делится на  $b$ .

### Очень важное упражнение. Используйте определение!

- Оба числа  $x, y$  дают остаток  $r$ , а  $z, t$  – остаток  $s$  при делении на  $b$ . Докажите, что следующие пары чисел дают одинаковые остатки при делении на  $b$ :
  - $x + z$  и  $r + s$
  - $x + z$  и  $y + t$ ;
  - $x - z$  и  $y - t$ ;
  - $kx$  и  $kr$ , где  $k$  – целое число;
  - $xz$  и  $rs$ ;  $xz$  и  $yt$ ;
  - $x^2$  и  $r^2$ ;
  - $x^n$  и  $r^n$ ;  $x^n$  и  $y^n$ , число  $n$  – натуральное;
  - $x^4 \cdot z \cdot y^4 - 11z^5$  и  $x \cdot y^7 \cdot z - 11z^5$ .

**Мысль №1.** Вычисляя остаток от деления некоторого арифметического выражения на некоторое число  $a$ , можно заменять числа на их остатки при делении на  $a$ . Например, найдем остаток от деления числа  $16 \cdot 17 \cdot 19$  на 3. Он будет таким же, как у  $1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$ .

**Мысль №2.** А можно заменять и не на остатки! Если какое-то другое число удобнее и остаток у него правильный, смело меняйте на него. Пример: ищем остаток при делении числа  $20^{14}$  на 7. Можно было бы заменить 20 на 6, но это дает мало пользы. Зато если заменить 20 на  $-1$ , получится  $(-1)^{14} = 1$ .

- Вычислите остаток числа:
  - $5 \cdot 6 \cdot 7$  при делении на 4;
  - $14^{15}$  на 13;
  - $12^9$  на 13;
  - $1001 \cdot 1002 \cdot 1003 + 2001 \cdot 2002 \cdot 2003 \cdot 2004$  на 1000.
  - $(118 + 17^{17})^{21} \cdot 7^{49}$  на 8;
- Докажите, что  $1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003 - 24$  делится (а) на 999; (б) на 1004.
- Докажите, что  $30^{99} + 61^{100}$  делится на 31.
- При каких степенях  $3^k$  дает остаток 1 при делении на 10? А остаток 3?
- Найдите остаток (а)  $3^{1798}$  при делении на 10 (б)  $17^{100}$  при делении на 7.