

Графы-2

0. В государстве 50 городов. Из каждого города выходит 7 дорог. Сколько всего дорог в этом государстве?

Теорема. Число ребер в графе равно половине от суммы степеней вершин.

1. В стране 1 столица, 15 городов и 50 деревень. Сколько в стране дорог, если из столицы выходит 20 дорог, из каждого города по 4 дороги, а из каждой деревни всего по 1?
2. В государстве от каждого города выходит по 3 дороги. Может ли в нём быть 100 дорог?
3. У короля 19 баронов-вассалов. Может ли оказаться, что у каждого вассального баронства 1, 5 или 9 соседних баронств?

Лемма о рукопожатиях. В любом графе число нечётных вершин чётно.

4. В стране из каждого города выходит 100 дорог и от каждого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от каждого города можно добраться до любого другого.
5. На пару опять пришло 17 человек. Может ли случиться так, что каждая девочка знакома ровно с тремя из присутствующих на паре мальчиков, а каждый мальчик ровно с пятью девочками?
6. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?
7. (а) Может ли случиться, что в компании из 11 девочек и 10 мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики – с одним и тем же числом девочек? (б) А если девочек 10, а мальчиков 9?
8. В стране несколько мегаполисов (из которых выходит по 43 дороги) и несколько провинциальных городов (из которых выходит по 4 дороги). Докажите, что из любого мегаполиса можно проехать в некоторый другой мегаполис.