

## Графы

*Графом* называется геометрическая фигура, состоящая из точек и соединяющих их линий. Точки называются *вершинами* графа, а линии — *ребрами*.

*Степенью вершины* называют количество ребер, выходящих из данной вершины.

- (а)** В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Вова обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр названий этих городов, делится на 3. Назовите все города, в которые можно добраться из города 1.

**(б)** Та же задача, но города соединены, если из их номеров можно составить число, кратное 7.
- Семь семиклассников играли в шахматы. Известно, что Кирилл сыграл шесть партий, Влад — пять, Саша и Рома — по три, Игорь и Юра — по две, Катя — одну. Кто с кем сыграл?
- В классе 10 девочек и 17 мальчиков. Каждый мальчик знает хотя бы 5 девочек, а каждая девочка знает хотя бы 9 мальчиков. Докажите, что можно выстроить живую цепочку, в которой любые два соседа знакомы, между **(а)** Машей и Ириной; **(б)** Мишей и Андреем; **(с)** Катей и Иваном.
- (а)** Докажите, что в любой компании людей всегда найдутся двое, у кого одинаковое количество знакомых в этой компании.

**(б)** Несколько футбольных команд проводят турнир в один круг. Докажите, что в любой момент турнира найдутся две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое число матчей.
- В трёх вершинах правильного пятиугольника расположили по фишке. Разрешается двигать их по диагонали на свободное место. Можно ли такими действиями добиться, чтобы одна из фишек вернулась на первоначальное место, а две другие поменялись местами?
- (а)** Из доски  $4 \times 4$  вырезаны все угловые клетки. Может ли шахматный конь обойти всю доску и вернуться на исходную клетку, побывав в каждой клетке ровно один раз?

**(б)** Сколько существует таких обходов?
- В углах шахматной доски  $3 \times 3$  стоят 4 коня: 2 белых и 2 черных (сверху два белых, снизу два черных). Можно ли за несколько ходов поставить коней так, чтобы во всех соседних углах стояли кони разного цвета?