Абака, группа Супер 7

Геометрия

1. Отрезок BD пересекается с отрезком AC в точке O так, что $BO = OD$. Оказалось, что $AB||DC$ и $AB = 10$. Найдите величину отрезка DC.

2. ABC — прямоугольный треугольник с гипотенузой AB. На прямой AB по обе стороны от гипотенузы отложены отрезки $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите угол $\angle KCM$.

3. Треугольник разрезали по всем его трем биссектрисам так (они пересекаются в одной точке), что получилось 6 треугольников. Сколько среди них может оказаться равносторонних? Укажите все варианты.

4. Про выпуклый пятиугольник $ABCDE$ известно, что $\angle ABC$ и $\angle ADE$ – равносторонние треугольники. Найдите угол между BD и CE.

5. В треугольнике ABC с углами $\angle B = 20°, \angle C = 40°$ биссектриса $AD = 7$. Чему равна разность $CB - BA$?

Теория чисел

1. Произведение двух натуральных чисел, каждое из которых не делится нацело на 10, равно 1000. Найдите их сумму.

2. Найти все такие натуральные числа p, что p и $5p + 1$ - простые.

3. Известно, что остаток от деления некоторого простого числа на 60 равен составному числу. Какому?

4. Найдите все решения ребуса $\overline{\text{ХИХИХИ}} = \overline{\text{ХО}} \times \overline{\text{ХИ}} \times \overline{\text{ГО}} \times \text{Г} \times \text{О}$. Разные буквы обозначают разные цифры, одинаковые - одинаковые.

5. Найдите все натуральные $n > 1$, для которых $n^2 + n - 9$ делится на $n - 1$.

Комбинаторика

1. В мешке лежат шарики двух разных цветов: черного и белого. Какое наименьшее число шариков нужно вынуть из мешка вслепую так, чтобы среди них заведомо оказались два шарика одного цвета?

2. Известно, что среди членов правительства Лимонии (а всего в нем 20 членов) из любых двух хотя бы один взяточник. Сколько в правительстве может быть взяточников?

3. В классе 25 учеников. Известно, что у любых двух девочек класса количество друзей-мальчиков из этого класса не совпадает. Какое наибольшее количество девочек может быть в этом классе?

4. На доске 8×8 для "морского боя"стоит четырехпалубный корабль. Какое наименьшее число выстрелов необходимо сделать, чтобы наверняка ранить его?

5. По кругу записаны 30 чисел, каждое равное модулю разности двух следующих за ним по часовой стрелке (то есть разности с отброшенным знаком). Сумма всех чисел равна 300. Что это за числа и в каком порядке записаны? Перечислите все возможные ответы.

Алгоритмы

1. У Юры есть калькулятор, который позволяет умножать число на 3, прибавлять к числу 3 или (если число делится на 3 нацело) делить на 3. Как на этом калькуляторе получить из числа 1 число 5? Предоставьте последовательность действий.

2. В одной урне лежат два белых шара, в другой два черных, в третьей - один белый и один черный. На каждой урне висела табличка, указывающее ее содержимое: ББ, ЧЧ, БЧ. Некто перевесил таблички так, что теперь каждая табличка указывает содержимое урны неправильно. Разрешается вынуть шар из любой урны, не заглядывая в нее. Какое наименьшее число извлечений потребуется, чтобы определить состав всех трех урн?

3. В Мексике экологи добились принятия закона, по которому каждый автомобиль хотя бы один день в неделю не должен ездить (владелец сообщает полиции номер автомобиля и «выходной» день недели этого автомобиля). В некоторой семье все взрослые желают ездить ежедневно (каждый – по своим делам!). Сколько автомобилей (как минимум) должно быть в семье, если взрослых в ней 8 человек?

4. В гости пришло 10 гостей и каждый оставил в коридоре пару калош. Все пары калош имеют разные размеры. Гости начали расходиться по одному, надевая любую пару калош, в которые они могли влезть (т.е. каждый гость мог надеть пару калош, не меньшую, чем его собственные). В какой-то момент обнаружилось, что ни один из оставшихся гостей не может найти себе пару калош, чтобы уйти. Какое максимальное число гостей могло остаться?

5. Учитель разложил на чашечные весы 12 гирек массами 1, 2, 3, ..., 12 грамм так, что одна из чаш перевесила. 11 учеников по очереди выходили из класса и забирали с собой по одной гирьке, причем после выхода каждого ученика весы меняли свое положение и перевешивала противоположная чаша весов. Какая гирька могла остаться на весах?

Логика

1. Вы опросили 1000 аборигенов, сидящих за огромным столом, и все они сказали: «Все остальные собравшиеся – лжецы». Сколько среди них рыцарей?

2. В семье есть Иван Сидорович, Сидор Иванович, Сидор Петрович, Петр Сидорович, Петр Петрович. Один из них сейчас смотрит телевизор, его отец дремлет, брат читает газету, а дети ушли гулять. Как зовут того, кто смотрит телевизор?

3. На пяти карточках записаны натуральные числа от 1 до 5. Настя и Надя взяли себе, не глядя, по две карточки, а оставшуюся карточку, также не глядя, спрятали. Изучив свои карточки, Настя сказала Наде: «Я знаю, что сумма чисел на твоих карточках чётна!», и была права. Какие числа записаны на Настиных карточках?

4. Однажды в комнате находились лжецы и рыцари, трое из них произнесли по два высказывания (они даны ниже). Сколько человек в комнате и сколько среди них лжецов?

1) «Нас тут не больше трех человек. Все мы — лжецы»;
2) «Нас тут не больше четырех человек. Не все мы лжецы»;
3) «Нас тут пятеро. Трое из нас лжецы».

5. 12 кандидатов в мэры рассказывали о себе. Через некоторое время один сказал: «До меня соврали один раз». Другой сказал: «А теперь -дважды». «А теперь - трижды» — сказал третий, и так далее до 12-го, который сказал: «А теперь соврали 12 раз». Тут ведущий прервал дискуссию. Оказалось, что по крайней мере один кандидат правильно посчитал, сколько раз соврали до него. Так сколько же раз всего соврали кандидаты?