

## Параллелограмм

**Определение.** Параллелограмм — четырехугольник, противоположные стороны которого равны и параллельны.

**Эквивалентные утверждения:**

- (а) Четырехугольник — параллелограмм;
  - (б) У четырехугольника противоположные стороны попарно параллельны;
  - (с) У четырехугольника противоположные стороны попарно равны;
  - (d) У четырехугольника две противоположные стороны равны и параллельны;
  - (е) Диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам.
1. Две стороны четырехугольника параллельны, а одна его диагональ делит другую пополам. Докажите, что данный четырехугольник — параллелограмм.
  2. Биссектриса угла параллелограмма делит сторону параллелограмма на отрезки, равные  $a$  и  $b$ . Найдите стороны параллелограмма.
  3. Через каждую вершину треугольника  $ABC$  параллельно его противоположной стороне провели прямую. Эти прямые образовали новый треугольник. Докажите, что вершины старого треугольника являются серединами сторон нового.
  4. На сторонах  $AB, BC, CD, DK$  параллелограмма  $ABCD$  выбрали точки  $K, L, M, N$  соответственно так, что  $AK = CM, BL = DN$ . Докажите, что
    - (а)  $BLDN$  и  $BMDK$  — параллелограммы.
    - (б) Докажите, что  $KLMN$  — параллелограмм.
    - (с) Докажите, что четырехугольник с вершинами в точках пересечения прямых  $AL, BM, CN$  и  $DK$  — параллелограмм.
  5. Биссектрисы двух углов при одной стороне параллелограмма делят другую его сторону на три равные части. Найдите отношение сторон параллелограмма.
  6. Из произвольной точки основания равнобедренного треугольника с боковой стороной, равной  $a$ , проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося четырехугольника.
  7. В треугольнике  $ABC$  биссектриса угла  $A$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $D$ ; прямая, проведенная через точку  $D$  параллельно  $CA$ , пересекает сторону  $AB$  в точке  $E$ ; прямая, проведенная через точку  $E$  параллельно  $BC$ , пересекает сторону  $AC$  в  $F$ . Докажите, что  $EA = FC$ .
  8. Противоположные стороны шестиугольника попарно равны и параллельны. Докажите, что отрезки, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.