Корни из единицы

All this sounds pretty damn complex.

Snoop Dogg

1. Вычислите
(a) $\sqrt{2-2i}$; **(b)** $\sqrt[3]{1+\sqrt{3}i}$; **(c)** $\sqrt[n]{-2^n}$.

2. Комплексные корни уравнения $x^n - 1 = 0$ называются корнями n-ой степени из единицы.
(a) Представьте их в тригонометрической форме.
(b) Найдите сумму этих чисел.
(c) Найдите их произведение.
(d) Найдите их сумму квадратов.

3. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — корни n-ой степени из единицы.
(a) Докажите, что среди них можно выбрать корень α такой, что для любого α_i найдется целое число k такое, что $\alpha_i = \alpha^k$.
(b) Сколько существует таких корней?

4. Вычислите суммы:
(a)
$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots$$
Этот пункт не про комплексные числа.
(b)
$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \ldots$$
Этот пункт тоже не про комплексные числа.
(c)
$$C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots$$
А вот тут надо разложить выражение $(1-i)^n$ *по биному и немного подумать.*
(d)
$$C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \ldots$$
Это следствие из предыдущих пунктов.
(e)
$$C_n^0 - 3C_n^2 + 3^2C_n^4 - 3^3C_n^6 + \ldots$$
Снова бином?!

5. Докажите, что $x^{66} + x^{55} + x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1$ делится на $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

6. Вычислите сумму k-х степеней корней n-й степени из 1, где k, n — натуральные числа, если

(a) НОД$(k, n) = 1$;

(b) НОД$(k, n) \neq 1$.

В листике суммарно 17 задач (включая пункты).

Количество полученных плюсиков по этому листику конвертируются в оценку по алгебре по следующему принципу.

3 — 9 плюсиков;

4 — 11 плюсиков;

5 — 14 плюсиков.

Задачи принимаются до 2 мая.