Тригонометрическая запись комплексного числа

All this sounds pretty damn complex.

Snoop Dogg

Определение. Каждое комплексное число можно однозначно представить в виде $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, причем r определяется единственным образом, а φ — с точностью до кратного 2π (если число не равно нулю). Число r называется *модулем* (и обозначается $|z|$), φ — *аргументом* комплексного числа, а сама форма называется *тригонометрической* записью комплексного числа.

1. Представьте в тригонометрической форме числа **(a)** 2; **(b)** $1+i$; **(c)** $1-\sqrt{3}i$.

2. **(a)** Докажите, что $|zt| = |z|\cdot|t|$ для любых $z, t \in \mathbb{C}$.
(b) Докажите, что если два натуральных числа представляются в виде суммы двух квадратов, то их произведение также представляется в виде суммы двух квадратов.

3. **(a)** Докажите, что при умножении комплексных чисел их модули умножаются друг на друга, а аргументы складываются.
(b) Докажите, что при делении комплексных чисел их модули делятся друг на друга, а аргументы складываются вычитаются.
(c) **(Формула Муавра)** Докажите, что

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

4. Пользуясь формулой Муавра, выразите $\sin 7\varphi$ через $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

5. Вычислите
(a) $\sqrt{1+i}$; **(b)** $(1+\sqrt{3}i)^{2020}$; **(c)** $1+(1+i)+(1+i)^2+\ldots+(1+i)^{444}$.

6. **(a)** Найдите все вещественные корни уравнения

$$(x+i)^{2020} + (x-i)^{2020} = 0.$$

(b) Найдите все его комплексные корни.

7. Упростите выражение:

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha.$$

В листике суммарно 15 задач (включая пункты).
Количество полученных плюсиков по этому листику конвертируются в оценку по алгебре по следующему принципу.
3 — 9 плюсиков;
4 — 11 плюсиков;
5 — 13 плюсиков.
Задачи принимаются до 9 апреля.