

Разная счётная геометрия

Повзрослел — это когда у стоматолога начинаешь бояться не боли, а счёта.

1. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке M , причём $AM = 2R$ и $CM = 3R$.
 - (а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
 - (б) Найдите расстояние между центрами его вписанной и описанной окружностей, если известно, что $R = 2$.
2. Точка B лежит на отрезке AC . Прямая, проходящая через точку A , касается окружности с диаметром BC в точке M и второй раз пересекает окружность с диаметром AB в точке K . Продолжение отрезка MB пересекает окружность с диаметром AB в точке D .
 - (а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.
 - (б) Найдите площадь треугольника DBC , если $AK = 3$ и $MK = 12$.
3. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.
 - (а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
 - (б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.
4. Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC , касается стороны BC в точке P и пересекает отрезок BO в точке Q . При этом отрезки OC и QP параллельны.
 - (а) Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.
 - (б) Найдите площадь треугольника BQP , если точка O делит высоту BD треугольника в отношении $BO : OD = 3 : 1$ и $AC = 2a$.
5. Окружность с центром O проходит через вершины B и C большей боковой стороны прямоугольной трапеции $ABCD$ и касается боковой стороны AD в точке T . Точка O лежит внутри трапеции $ABCD$.
 - (а) Докажите, что угол BOC вдвое больше угла BTC .
 - (б) Найдите расстояние от точки T до прямой BC , если основания трапеции AB и CD равны 4 и 9 соответственно.
6. Дана равнобедренная трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM . Окружность с центром O , построенная на боковой стороне KL как на диаметре, касается боковой стороны MN и второй раз пересекает большее основание KN в точке H , точка Q — середина MN .

- (а) Докажите, что четырёхугольник $NQOH$ — параллелограмм.
- (б) Найдите KN , если $LKN = 75^\circ$ и $LM = 1$.

7. Сторона CD прямоугольника $ABCD$ касается некоторой окружности в точке M . Продолжение стороны AD пересекает окружность в точках P и Q , причём точка P лежит между точками D и Q . Прямая BC касается окружности, а точка Q лежит на прямой BM .
 - (а) Докажите, что $\angle DMP = \angle CBM$.
 - (б) Известно, что $CM = 17$ и $CD = 32$. Найдите сторону AD .
8. Отрезок, соединяющий середины M и N оснований BC и AD соответственно трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.
 - (а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.
 - (б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 8. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB , основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.
9. Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E . В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T .
 - (а) Докажите, что прямые KT и DE параллельны.
 - (б) Найдите угол BAD , если известно, что $AD = 6$ и $KT = 3$.
10. Стороны KN и LM трапеции $KLMN$ параллельны, прямые LM и MN — касательные к окружности, описанной около треугольника KLN .
 - (а) Докажите, что треугольники LMN и KLN подобны.
 - (б) Найдите площадь треугольника KLN , если известно, что $KN = 3$, а $\angle LMN = 120^\circ$.

В листике суммарно 20 задач (включая пункты).
 Количество полученных плюсов по этому листику конвертируются в оценку по геометрии по следующему принципу.

3 — 15 плюсов;
4 — 16 плюсов;
5 — 18 плюсов.

Задачи принимаются вплоть до 28 марта.