Сходимость процессов

Всегда лучше наблюдать за процессом, чем делать что-то самому.

Гомер Симпсон

1. В двух коробках лежат по 9 шариков. За один ход можно убрать из любой коробки 1 шарик или убрать 1 шарик из левой коробки и положить 9 шариков в правую. Докажите, что ходы рано или поздно закончатся.

2. В квадрате 20×20 стоят 400 ненулевых
(a) целых;
(b) вещественных
чисел. Можно изменить знак у всех чисел, стоящих в одном столбце или в одной строке. Докажите, что за конечное число таких операций можно добиться того, что сумма чисел, стоящих в любой строке или в любом столбце, будет неотрицательной.

3. На доске написаны 3 различных натуральных числа. За ход можно взять одно из крайних чисел (наибольшее или наименьшее) и заменить на среднее арифметическое или геометрическое его с каким-то другим из чисел (при условии, что это среднее — натурально, и все числа остаются различными). Докажите, что удастся сделать лишь конечное число ходов (если при любом возможном ходе набор чисел не меняется, то будем считать, что ходить больше нельзя).

4. Несколько ребят стоят по кругу. У каждого есть некоторое количество конфет. Сначала у каждого чётное количество конфет. По команде каждый передает половину своих конфет стоящему справа. Если после этого у кого-нибудь оказалось нечётное количество конфет, то ему извне добавляется одна конфета. Это повторяется много раз. Доказать, что настанет время, когда у всех будет поровну конфет.

5. В каждой из 2020 стран правит либо партия правых, либо партия левых. Каждый год в одной из стран может поменяться власть. Это может произойти в том случае, если в большинстве граничащих с данной страной стран правит не та партия, которая правит в данной стране. Докажите, что смены правительств не могут продолжаться бесконечно.

Определение. Рассмотрим две строки одинаковой длины, состоящие из натуральных чисел: $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Будем говорить, что $A \succ B$ (или A *мажорирует* B), если: или $a_1 > b_1$; или $a_1 = b_1$ и $a_2 > b_2$; или $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ и $a_3 > b_3$ и т.д.

6. **Теорема.** Докажите, что
(a) если $A \preceq B$, $B \preceq C$, то $A \preceq C$.
(b) строго убывающая последовательность строк длины n всегда конечна.
(c) в каждом непустом множестве строк длины n есть наименьший элемент.

Таким образом мы можем упорядочить множество строк длины n. Такой порядок называется *лексикографическим.* Своё название лексикографический порядок получил по аналогии с сортировкой по алфавиту в словаре.

7. В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет её в то же место колоды (если «пачка» состоит лишь из одной карты, то требуется только, чтобы она лежала рубашкой вниз). Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх, как бы ни действовал Петя.

8. Компьютер сортирует массив из 100 натуральных чисел, стремясь выстроить элементы в порядке неубывания. Для этого он находит два любых элемента (возможно, несоседних), где левый больше правого, и меняет их местами. После чего вирус новый правый элемент умножает на 10. Докажите, что рано или поздно массив отсортируется.

9. Есть натуральное число $x > 1$. Каждую секунду Петя пишет вместо него число $y = x \cdot (p - 1)^k/p$, где p — какой-нибудь простой делитель числа x, а число k произвольно (и меняется от хода к ходу). Докажите, что рано или поздно у Пети получится 1.

10. Петя ставит точку с натуральными координатами, проводит из нее два луча вправо и вверх, и закрашивает внутренность угла и его стороны. Следующую точку с натуральными координатами он выбирает среди незакрашенных, и так же строит и закрашивает угол. Докажите, что через несколько операций все точки с натуральными координатами будут закрашены.

11. Двое играют в следующую игру. Есть последовательность из n крестиков и ноликов. За один ход разрешается взять любые k ($k = 1, \dots, n$) подряд идущих знака таких, что эта последовательность начинается с крестика, а все остальные знаки в ней — нолики (допускается последовательность из одного крестика), и инвертировать её (заменить крестик на нолик и нолики на крестики). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре (в зависимости от начальной позиции)?

12. Петя вырезал из бумаги 2020 различных прямоугольников с целыми сторонами, не превышающими 1000. Докажите, что среди них можно выбрать пять таких, что каждый следующий строго больше предыдущего.

В листике суммарно 15 задач (включая пункты).
Количество полученных плюсиков по этому листику конвертируются в оценку по алгебре по следующему принципу.

3 — 8 плюсиков;
4 — 10 плюсиков;
5 — 12 плюсиков.

Шестая задача (со всеми пунктами) будет разобрана 11 марта. Листик будет окончательно разобран 18 марта.