Многочлены

Я «на ты» с математикой. Мой бывший учитель даже называл меня повелитель многочленов.

Сэм Леонард

1. **Основной факт.**
(a) Докажите, что многочлен степени n имеет не более n различных корней.
(b) Докажите, что если два многочлена степени не выше n совпадают в $n+1$ точке, то они равны.

2. Докажите, что значение выражения не зависит от x

$$\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}+\frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}.$$

3. Решите уравнение
(a)

$$c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+b\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}=x;$$

(b)

$$c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}=x^2;$$

4. Леша выписал на доске 100 различных чисел. Затем он увеличил все числа на один. Оказалось, что произведение чисел не изменилось. Затем он повторил операцию, и произведение чисел снова не изменилось. Какое наибольшее количество раз он мог повторить эту операцию, чтобы произведение чисел оставалось постоянным?

5. Про многочлен $f(x)=x^{10}+a_9x^9+\ldots+a_0$ известно, что $f(1)=f(-1),\ \ldots,\ f(5)=f(-5)$. Докажите, что $f(x)=f(-x)$ для любого действительного x.

6. Многочлен P седьмой степени с целыми коэффициентами в семи целых точках принимает значения ±1. Докажите, что многочлен P неприводим над Z, иными словами не существует многочленов Q_1 и Q_2 ненулевой степени с целыми коэффициентами таких, что $P=Q_1Q_2$.

7. Даны два многочлена положительной степени $P(x)$ и $Q(x)$, причём выполнены тождества $P(P(x))\equiv Q(Q(x))$ и $P(P(P(x)))\equiv Q(Q(Q(x)))$. Обязательно ли тогда выполнено тождество $P(x)\equiv Q(x)$?

8. Найдите все многочлены $p(x)$, такие, что для любых ненулевых чисел x,y,z, удовлетворяющих условию $xz+yz=xy$, имеет место равенство: $\dfrac{1}{p(x)}+\dfrac{1}{p(y)}=\dfrac{1}{p(z)}$.

9. Множество из 2020 подряд идущих натуральных чисел назовем *прекрасным*, если его можно разбить на два подмножества с равными произведениями. Докажите, что прекрасных множеств конечно.

В листике суммарно 11 задач (включая пункты).
Количество полученных плюсиков по этому листику конвертируются в оценку по алгебре по следующему принципу.

3 — 5 плюсиков;

4 — 7 плюсиков;

5 — 9 плюсиков.

Задачи принимаются до 11 февраля.