Комбинаторная теория чисел

Кажется здесь не хватает хорошей ТэЧехи

Николай Крохмаль

1. Вася вписал в клетки таблицы 4×18 натуральные числа от 1 до 72 в некотором одному ему известном порядке. Сначала он нашел произведение чисел, стоящих в каждом столбце, а затем у каждого из 18 полученных произведений вычислил сумму цифр. Могли ли все получившиеся суммы оказаться одинаковыми?

2. Докажите, что одно из сравнений

$$x^2 \equiv i \pmod{101}, \quad i = 1, 2, \ldots, 50$$

не имеет решений.

3. На доске написано 10 натуральных чисел. Докажите, что из этих чисел можно выбрать несколько чисел и расставить между ними знаки «+» и «−» так, чтобы полученная в результате алгебраическая сумма делилась на 1001.

4. Шесть игральных костей нанизали на спицу так, что каждая может вращаться независимо от остальных (протыкаем через центры противоположных граней). Спицу положили на стол и прочитали число, образованное цифрами на верхних гранях костей. Докажите, что можно так повернуть кости, чтобы это число делилось на 7. (На гранях стоят цифры от 1 до 6, сумма цифр на противоположных гранях равна 7.)

5. Дана бесконечная вправо последовательность цифр и натуральное число l. Докажите, что можно выбрать несколько цифр подряд, образующих число, делящееся на l, если
(a) $l = 9$;
(b) l — нечетное число, не делящееся на 5.

6. Теннисист для тренировки играет каждый день хотя бы одну партию; при этом, чтобы не перетрудиться, он играет не более 12 партий в неделю. Докажите, что можно найти несколько таких подряд идущих дней, в течение которых теннисист сыграл ровно двадцать партий.

7. **(a)** У каждого целого числа от $n+1$ до $2n$ включительно (n — натуральное) возьмём наибольший нечётный делитель и сложим все эти делители. Докажите, что получится n^2.
(b) Из чисел от 1 до $2n$ выбрано $n+1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.
(c) Из двухсот чисел: 1, 2, 3, …, 199, 200 выбрали одно число, меньшее 16, и ещё 99 чисел. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два таких, одно из которых делится на другое.

8. Докажите, что если p — простое число, то разрешимо сравнение

$$1 + x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

9. Докажите, что найдется число, представимое в виде суммы четырех квадратов целых чисел более, чем миллионом способов.

10. Доказать, что из 17 различных натуральных чисел либо найдутся пять таких чисел a, b, c, d, e, что каждое из чисел этой пятёрки, кроме последнего, делится на число, стоящее за ним, либо найдутся пять таких чисел, что ни одно из них не делится на другое.

11. Дана строчка из 25 цифр. Всегда ли можно расставить в этой строчке знаки арифметических операций $+, -, \times, :$ и скобки так, чтобы образовалось числовое выражение, равное 0. Последовательно стоящие цифры можно объединять в числа, но порядок цифр изменять нельзя.

В листике суммарно 14 задач (включая пункты).
Количество полученных плюсиков по этому листику ПРИ ЖЕЛАНИИ конвертируются в оценку по алгебре по следующему принципу.
4 — 7 плюсиков;
5 — 9 плюсиков.
Последний день сдачи задач — 14 декабря (суббота).