Формула включений и исключений

Задачи на разбор

1. **(a)** Докажите $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
(b) Докажите $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2. **(a)** Докажите $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
(b) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$.
(c) Сформулируйте аналогичное утверждение для n множеств.

Задачи для самостоятельного решения

1. **(a)** Докажите по индукции

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \cdots$$
$$\cdots - |A_{n-1} \cap A_n| + \dots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

(b) **(Другое доказательство)** Пусть элемент a входит ровно в k множеств A_i. Посчитайте, сколько раз он посчитан в левой и правой части формулы.

2. Внутри фигуры площади 6 расположено три многоугольника площади не менее 3 каждый. Докажите, что существует два многоугольника, площадь пересечения которых не менее 1.

3. Куб с ребром длины 20 разбит на 8 000 единичных кубиков, и в каждом кубике записано число. Известно, что в каждом столбике из 20 кубиков, параллельном ребру куба, сумма чисел равна 1 (рассматриваются столбики всех трёх направлений). В некотором кубике записано число 10. Через этот кубик проходит три слоя $1\times20\times20$, параллельных граням куба. Найдите сумму всех чисел вне этих слоев.

4. Леонид, Владимир и Вера решили вместе 100 задач по математике. Каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу трудной, если ее решил только один человек, и легкой, если ее решили все трое. Насколько отличается количество трудных задач от количества легких?

5. Для натуральных a, b и c докажите равенство

$$[a, b, c] = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot (a, b, c)}{(a, b) \cdot (b, c) \cdot (a, c)}.$$

6. В классе 30 учеников. Сколькими способами они могут пересесть так, чтобы ни один не сел на свое место?

7. Докажите, что число чисел взамно простых с $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ и не больших n равно $n \cdot \prod\limits_{i=1}^{k} \left(1 - \dfrac{1}{p_i}\right)$

8. Обозначим $T(n) = 1+2+\ldots+n$. Пусть a, b, c — такие натуральные числа, что каждое из них не превосходит n, а их сумма не меньше $2n$. Не используя явную формулу для $T(n)$, доказать, что

$$T(n) = T(a) + T(b) + T(c) - T(a + b - n) - T(b + c - n) - T(a + c - n) + T(a + b + c - 2n).$$

9. Сколькими способами можно расселить 15 гостей в четырех комнатах, если требуется, чтобы ни одна из комнат не осталась пустой?

10. Внутри фигуры площади 4 расположены 7 многоугольников площадью не менее 1. Докажите, что существует два многоугольника, площадь пересечения которых не менее $1/7$.