Радикальные оси

Мозг Артура совершил сальто-мортале внутри черепной коробки.

Из книги «Автостопом по галактике. Опять в путь»

1. Даны две непересекающиеся окружности. К ним провели четыре их общие касательные. Докажите, что их середины лежат на одной прямой.

2. Дана неравнобедренная трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Окружность, проходящая через точки A и B, пересекает боковые стороны трапеции в точках P и Q, а диагонали — в точках M и N. Докажите, что прямые PQ, MN и CD пересекаются в одной точке.

3. На стороне AB прямоугольного треугольника $ABC(\angle B = 90)$ выбрана точка C'. Точка B' – проекция C' на AC. BB' и CC' пересекаются в точке O. Докажите, что описанные окружности треугольников $BC'O$ и $OB'C$ вторично пересекаются на прямой AO.

4. В остроугольном треугольнике ABC высоты AP и BQ пересекаются в точке H. Прямая PQ пересекает прямую AB в точке T. CT вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K. Докажите, что прямые HK и CT перпендикулярны.

5. Дан такой выпуклый четырехугольник $ABCD$, что $AB = BC$ и $AD = DC$. Точки K, L и M — середины отрезков AB, CD и AC соответственно. Перпендикуляр, проведенный из точки A к прямой BC, пересекается с перпендикуляром, проведенным из точки C к прямой AD, в точке H. Докажите, что прямые KL и HM перпендикулярны.

6. Даны окружности ω_1 и ω_2, касающиеся в точке D. A — фиксированная точка на ω_1. Прямые AB, AC — касательные к окружности ω_2. Точки M, N — середины отрезков AB, AC. Докажите, что точка пересечение касательных к ω_1 и к ω_2, проведенные соответственно в точках A и D пересекаются на прямой MN.

7. На сторонах BC, AC, AB остроугольного треугольника ABC выбраны произвольные точки A_1, B_1, C_1. Докажите, что три общие хорды пар окружностей с диаметрами AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке пересечения высот треугольника ABC.

8. Вписанная окружность (I — центр) касается сторон AB, BC, AC в точках C_0, A_0, B_0. Прямая BI пересекает A_0C_0 в точке K. Докажите, что центр описанной окружности треугольника BKB_0 лежит на прямой AC.

9. Серединный перпендикуляр к стороне AC остроугольного треугольника ABC пересекает прямые AB и BC в точках B_1 и B_2 соответственно, а серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямые AC и BC в точках C_1 и C_2 соответственно. Окружности, описанные около треугольников BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в точках P и Q. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на прямой PQ.

10. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся сторон BC, CA и AB в точках X, Y и Z — соответственно. На плоскости отметили точку K. Серединные перпендикуляры к отрезкам KX, KY и KZ пересекают прямые BC, CA и AB в точках X_1, Y_1 и Z_1 соответственно. Докажите, что точки X_1, Y_1 и Z_1 лежат на одной прямой

11. Из точки A, лежащей вне окружности ω, проведены касательные AB, AC (B, $C \in \omega$). Точки E, F — середины отрезков AB, AC соответственно. На прямой EF выбрана произвольная точка D, из которой к ω проводятся касательные DP, DQ ($P, Q \in \omega$). Прямая PQ пересекает прямую EF в точке M. Докажите, что $\angle DAM = 90^\circ$.

12. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AP и BQ, а также медиана CM. Точка R — середина CM. Прямая PQ пересекает прямую AB в точке T. Докажите, что $OR \perp TC$, где O — центр описанной окружности треугольника ABC.

В листике суммарно 12 задач (включая пункты).
Количество полученных плюсиков по этому листику ПРИ ЖЕЛАНИИ конвертируются в оценку по геометрии по следующему принципу.
4 — 9 плюсиков;
5 — 11 плюсиков.
Последний день сдачи задач — 17 октября (четверг).