

Произведение отрезков

- 100 на 100 — это сколько?
- 10 тысяч.
- Почему?
- Такова жизнь...

Из фильма «Укрощение
строптивого»

1. (а) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . Докажите, что четырехугольник $ABCD$ вписан тогда и только тогда, когда $OA \cdot OC = OB \cdot OD$.
(б) На сторонах угла с вершиной P выбраны точки A, B, C и D (A и B на одной стороне угла, C и D на другой). Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.
2. Доказать, что, если на основании AC равнобедренного треугольника ABC взять произвольную точку M , то $BC^2 - BM^2 = AM \cdot CM$.
3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса AM . На луче CA отложен отрезок CN , равный BM . Докажите, что точки A, B, M и N лежат на одной окружности.
4. Две окружности пересекаются в точках A и B ; MN — общая касательная к ним. Докажите, что прямая AB делит отрезок MN пополам.
5. Прямая OA касается окружности в точке A , а хорда BC параллельна OA . Прямые OB и OC вторично пересекают окружность в точках K и L . Докажите, что прямая KL делит отрезок OA пополам.
6. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC больше диагонали BD ; M — такая точка диагонали AC , что четырехугольник $BCDM$ вписанный. Докажите, что прямая BD является общей касательной к описанным окружностям треугольников ABM и ADM .
7. Даны окружность S и точки A и B вне её. Для каждой прямой ℓ , проходящей через точку A и пересекающей окружность S в точках M и N , рассмотрим описанную окружность треугольника BMN . Докажите, что все эти окружности имеют общую точку, отличную от точки B .
8. Через центр I вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, перпендикулярная прямой AI и пересекающая прямую BC в точке M . Из точки I на прямую AM опущен перпендикуляр ID . Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.
9. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках M и N . Докажите, что если вершины A и C некоторого прямоугольника $ABCD$ лежат на окружности ω_1 , а вершины B и D — на окружности ω_2 , то точка пересечения диагоналей прямоугольника лежит на прямой MN .
10. Дан треугольник ABC . Обозначим через M середину стороны AC , а через P — середину отрезка CM . Описанная окружность треугольника ABP пересекает сторону BC

во внутренней точке Q . Докажите, что $\angle ABM = \angle MQR$.

11. Биссектриса AD треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке T . Пусть ω — окружность с центром в точке T и радиусом TC . Прямая ℓ , проходящая через точку D , пересекает ω в точках K и N . Докажите, что $\angle KAD = \angle NAD$.
12. Трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD вписана в окружность Ω . Окружность ω проходит через точки C , D и пересекает отрезки CA , CB в точках A_1 , B_1 соответственно. Точки A_2 и B_2 симметричны точкам A_1 и B_1 относительно середин отрезков CA и CB соответственно. Докажите, что точки A , B , A_2 и B_2 лежат на одной окружности.
13. Дан остроугольный треугольник ABC . Точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно, точка H — основание высоты, опущенной из вершины B . Описанные окружности треугольников AHN и CHM пересекаются в точке P ($P \neq H$). Докажите, что прямая PH проходит через середину отрезка MN .
14. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 , CC_1 . Через A и C_1 проведены две окружности, касающиеся BC в точках P и Q . Докажите, что точки A , B_1 , P , Q лежат на одной окружности.
15. Окружность ω касается сторон угла BAC в точках B и C . Прямая ℓ пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Окружность ω пересекает ℓ в точках P и Q . Точки S и T выбраны на отрезке BC так, что $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Докажите, что точки P , Q , S и T лежат на одной окружности.

В листике суммарно 16 задач (включая пункты).

Количество полученных плюси́ков по этому листику конвертируются в оценку по геометрии по следующему принципу.

3 — 9 плюси́ков;

4 — 11 плюси́ков;

5 — 13 плюси́ков.

Последний день сдачи задач — 28 сентября (суббота).