

## Деревья.

**Цикл** — связный граф, в котором степень каждой вершины равна 2.

**Дерево** — связный граф без циклов.

- Докажите следующие факты:
  - Граф является деревом тогда и только тогда, когда любые две его вершины соединены ровно одним простым путем.
  - В любом дереве на  $n \geq 2$  вершинах есть не менее двух висячих вершин.
  - Связный граф является деревом тогда и только тогда, когда число вершин в нем на единицу больше числа ребер.
  - Связный граф является деревом тогда и только тогда, когда при удалении любого ребра из него, он превращается в несвязный граф.
- В графе степени четырёх вершин равны 3, пяти вершин — 4, двух вершин — 1. Может ли он быть деревом?
- В некоторой стране 2020 городов, каждый соединен дорогой с каждым. Сколько дорог можно закрыть на ремонт одновременно, чтобы транспортная коммуникация между городами не нарушилась?
- Двое играют в игру на прямоугольной сетке размера  $m \times n$  связанной из веревочек единичной длины. За ход можно разрезать не разрезавшуюся ранее единичную веревочку. Проигрывает тот, после чьего хода сетка распадется на части. Кто из игроков победит при правильной игре и как он должен для этого играть?
- Вдоль границ клеток шахматной доски положили спички. Сколько минимум спичек надо убрать, чтобы ладья смогла добраться с любого шахматного поля до любого?
- В стране есть сеть железных дорог по которым можно проехать с любой станции на любую другую. Известно, что среди всех станций есть ровно 20 узловых, в которых сходится не менее трех линий и ровно 21 тупиковая, а также, возможно, какие-то еще. Докажите, что в сети есть кольцевая линия.
- Клетчатая полоска  $1 \times n$  разбита на единичные клетки. Можно ли стороны клеток раскрасить в три цвета так, чтобы при выкидывании отрезков любого из цветов по оставшимся отрезкам можно было попасть из каждой вершины в любую другую?