

Инварианты и полуинварианты

1. В памяти робота записано число 2019. За одну операцию робот может прибавить к имеющемуся числу 10, поменять цифры в разряде десятков и сотен местами, а также умножить имеющееся число на 11. Может ли робот за несколько ходов добиться того, чтобы в его памяти оказалось записано число 20199102?
2. Испорченный калькулятор умеет производить с числом только три операции: прибавлять 8, вычитать 6 и умножать на 3. Можно ли с помощью этого калькулятора из числа 14 получить число 15?
3. В таблице 100×100 стоят символы «+» и «-». Всюду, кроме двух главных диагоналей стоят знаки «+». На диагоналях стоят знаки «-». Разрешается менять все знаки в одном столбце или строке на противоположные. Можно ли сделать так, что во всей таблице стоят одинаковые знаки?
4. На компьютере написали код. Он считывает с экрана пару чисел (a, b) и «индикатор» c . Если $c = 0$, то код выдаёт пару (b, a) и ждёт нового индикатора. Если $c = 1$, то код выдаёт пару $(a, a + b)$ и ждёт индикатора. А если $c = 1$, то код выдаёт пару $(a - b, b)$ и ждёт индикатора. Можно ли при помощи этого кода получить из карточки $(1, 1)$ карточку $(123321, 1001)$?
5. На доске написаны числа $1, 2, \dots, 10$. Разрешается взять любые три числа a, b и c и заменить их числами $\frac{ab}{c}, \frac{bc}{a}, \frac{ac}{b}$. Можно ли с помощью таких операций получить на доске числа $2, 3, \dots, 11$?
6. Дано 10 последовательных натуральных чисел. Можно за одно действие выбрать любые два числа a и b (не обязательно стоящие рядом) и заменить их числами ab и $a^2 - 2011b^2$. Можно ли такими действиями получить 10 других последовательных натуральных чисел, стоящих в каком-то порядке, ни одно из которых не совпадает с числами из изначального набора?