Неравенства.

Неравенства о средних ($x_1, x_2, \ldots, x_n$ -— положительные числа):

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \leqslant \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}.$$

1. Найдите наименьшее значение выражения при положительных x и y
(a) $x+\frac{1}{x}$; **(b)** $3x+\frac{1}{4x}$; **(c)** $xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$; **(d*)** $x^2+\frac{1}{x}$.

2. Докажите неравенство для положительных значений переменных

$$\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)(a_1+a_2+\cdots+a_n) \geqslant n^2.$$

3. Докажите неравенство для положительных значений переменных

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \geqslant \frac{ab+bc+ac}{3}.$$

4. Докажите неравенство для положительных значений переменных

$$(ab+bc+ca)^2 \geqslant 3abc(a+b+c).$$

5. Докажите, что если произведение двух положительных чисел больше их суммы, то сумма больше 4.

6. Докажите неравенство для положительных значений переменных

(a) $$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2};$$

(b) $$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b} \geqslant \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

7. Даны вещественные $x_0 > x_1 > \ldots > x_n$. Докажите, что

$$x_0+\frac{1}{x_0-x_1}+\frac{1}{x_1-x_2}+\cdots+\frac{1}{x_{n-1}-x_n} \geqslant x_n+2n.$$

8. Докажите, что для положительных a выполнено неравенство:

$$a^{40}+\frac{1}{a^{16}}+\frac{2}{a^4}+\frac{4}{a^2}+\frac{8}{a} \geqslant 16.$$